

Zadania kwalifikacyjne

Katarzyna Budzik

Zachęcam do kontaktu: *kbudzikk@gmail.com*.

1 Przestrzenie metryczne

Teoria

Def. Metryką w zbiorze X nazywamy dowolną funkcję $d : X \times X \rightarrow [0, +\infty)$ spełniającą następujące warunki:

- ★ $\forall x, y \in X \quad d(x, y) = 0 \iff x = y,$
- ★ $\forall x, y \in X \quad d(x, y) = d(y, x),$
- ★ $\forall x, y, z \in X \quad d(x, y) + d(y, z) \geq d(x, z).$

Parę (X, d) nazywamy przestrzenią metryczną.

Def. Kulą (otwartą) w (X, d) o promieniu $r > 0$ i środku $x_0 \in X$ nazywamy zbiór

$$K(x_0, r) = \{x \in X : d(x, x_0) < r\}.$$

Zadania

1. Udowodnij, że następujące funkcje są metrykami.

a) Metryka dyskretna $d : X \times X \rightarrow \{0, 1\}$ (2p)

$$d(x, y) = \begin{cases} 1 & x \neq y \\ 0 & x = y. \end{cases}$$

b) Metryka euklidesowa $d : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow [0, +\infty)$ (4p)

$$d(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2},$$

gdzie $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$.

c) Metryka maksimum $d : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow [0, +\infty)$ (3p)

$$d(x, y) = \max\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|, \dots, |x_n - y_n|\}.$$

2. Narysuj kulę w \mathbb{R}^2 o środku w $(0,0)$ i promieniu 2 w
- metryce dyskretnej (2p),
 - metryce euklidesowej (1p),
 - metryce maksimum (1p).

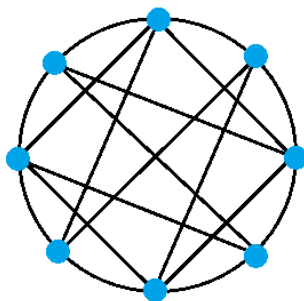
2 Grafy i wzór Eulera

Teoria

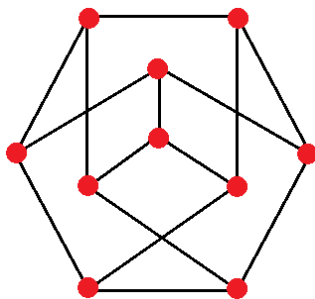
Np. tu.

Zadania

1. Czy poniższy graf jest planarny? (1p)



2. Wskaż drzewo rozpinające poniższego grafu. (1p)



3. W pewnym wielościanie wszystkie ściany są pięciokątami i sześciokątami. Ile jest ścian pięciokątnych, jeżeli w każdym wierzchołku spotykają się dokładnie trzy ściany? (2p)
4. Pokaż, że w dowolnym drzewie o co najmniej dwóch wierzchołkach, istnieją co najmniej dwa wierzchołki o stopniu równym jeden. (2p)