

# 1 WAŻNE

1 Przedstaw w postaci  $a + bi$  następujące liczby zespolone:

1.  $(a + bi)^{-1}$
2.  $(a + bi)^2$
3. Rozwiązania równania  $2z + \bar{z} = 3 - i$
4.  $\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)^{27}$  (Wskazówka: przedstaw liczbę w nawiasie w postaci  $|z|e^{i\theta}$ )

2 Przedstaw w postaci  $re^{i\phi}$ :

1.  $\frac{1}{2}i$
2. Rozwiązania równania  $z^2 = -\sqrt{3} + i$
3. Rozwiązania równania  $z^3 = -8$
4.  $\frac{1}{pe^{i\theta}}$ ,  $p \in \mathbb{R}$

3 Oblicz:  $(\cos ax)''$ ,  $(\sin ax)''$ ,  $(e^{\gamma x})^{(n)}$  ( $n$ -ta pochodna, czyli pochodna wzięta  $n$  razy). Udowodnij, że funkcja  $A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)$  jest rozwiązaniem równania  $x'' + \omega^2 x = 0$ , zaś funkcja  $Ae^{\gamma t} + Be^{-\gamma t}$  - rozwiązaniem  $x'' - \gamma^2 x = 0$ .

4 Znajdź funkcję  $\psi(x)$  spełniającą równanie

$$\psi'' + 3\psi = 0 \tag{1}$$

oraz warunki początkowe  $\psi(0) = 0$ ,  $\psi'(0) = v$ .

5 Dane jest równanie

$$x'' - x = 0 \tag{2}$$

Wiadomo, że rozwiązanie dla  $t \geq 0$  jest ograniczone z góry i z dołu. Ponadto  $x(0) = 1$ . Znajdź  $x(t)$ .

# 2 TEŻ WAŻNE, ALE NIE AŻ TAK BARDZO JAK TE NA GÓRZE SĄ WAŻNE

6 Rozważmy funkcję  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(t) = |Ae^{iat} + Be^{ibt}|$ ,  $a, b, A, B \in \mathbb{R}^+$ . Znajdź takie  $t$ , dla których  $f$  przyjmuje minimum.

7 Rozważmy  $f(\theta) = |\sum_{k=0}^{n-1} e^{ik\theta}|^2$ ,  $n \geq 3$ . Funkcja ta przyjmuje maksimum dla  $\omega = 0$ . Również przy  $\omega = 2\pi$  mamy (globalne) maksimum. Pokaż graficznie, że w przedziale  $(0, 2\pi)$  mamy pewną liczbę maksimów lokalnych. Jeśli okaże się to za trudne, możesz ograniczyć się do przypadku  $n = 3$ .

8 Rozważmy dwa jednakowe, punktowe źródła światła monochromatycznego. Jeśli jedynie źródło A jest włączone, to w punkcie X obserwujemy natężenie  $I$ , podobnie dla źródła B. Załóżmy, że po włączeniu obu źródeł fale interferują konstruktywnie w punkcie X (tzn. znajduje się tam jasny prążek/punkt). Jakie jest natężenie światła w punkcie X? Czy nie jest to paradoksalne? Jak wygląda sytuacja dla  $n$  źródeł?

9 Na czym polega zasada Huygensa? Zakładając, że fale na płytce wodzie rozchodzą się z prędkością wzrastającą wraz ze wzrostem głębokości, wyjaśnij, czemu fale zazwyczaj uderzają w plażę będąc zorientowane równoległe do niej, natomiast niemal nigdy nie są ustawione pod kątem. Podaj inny, **ciekaw**y przykład zastosowania zasady Huygensa.

10 Podaj przykłady przestrzeni zdarzeń, zdarzeń niezależnych i wyjaśnij, co to jest gęstość prawdopodobieństwa (na osi rzeczywistej).

**11. (Bonus)** Ze zwykłej talii 52 kart losowo wybieram 13. Prawdopodobieństwo, że wylosuję 4 asy, wynosi ok. 0.00264 (a przynajmniej mam taką nadzieję). Jednak jeśli najpierw wyrzucę połowę kart z talii (26) i wezmę 13 kart z pozostałych 26, to z bardzo dużym prawdopodobieństwem jakiś as zostanie wyrzucony wcześniej, więc prawdopodobieństwo otrzymania czwórki asów będzie mniejsze. Jak zmieni się to prawdopodobieństwo?