Analityczna teoria liczb: metoda okręgu — zadania kwalifikacyjne Piotr Achinger

Uwagi. Należy wybrać i rozwiązać cztery z poniższych ośmiu zadań. Notacja $\log x$ oznacza logarytm naturalny ($\ln x$). Litery $\mathbb{Z}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ oznaczają kolejno zbiory liczb całkowitych, rzeczywistych, zespolonych. Pytania należy wysyłać na adres `piotr.achinger@gmail.com`.

Zadanie 1. Udowodnić, że dla dowolnej liczby naturalnej N 1 istnieje liczba naturalna k taka, że liczby

$$k+1, k+2, \ldots, k+N$$

są złożone.

Zadanie 2. Udowodnić, że dla każdej liczby naturalnej $n > 1$, co najmniej jedna z liczb

$$n, n+1, n+2, \ldots, n^2$$

jest pierwsza. *Uwaga: to jest słaba wersja twierdzenia Czebyszewa, które mówi, że istnieje liczba pierwsza pomiędzy n a $2n$. W rozwiązaniu nie można się powoływać na twierdzenie Czebyszewa.*

Zadanie 3. Udowodnić, że nieskończona suma

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\ldots+\frac{1}{p}+\ldots$$

odwrotności liczb pierwszych jest nieskończona. *Wskazówka: pokazać, że w przeciwnym przypadku nieskończony iloczyn*

$$\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{5}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{p}\right)\ldots$$

byłby niezerowy, w związku z czym jego odwrotność

$$\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\ldots\right)\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\ldots\right)\left(1+\frac{1}{5}+\frac{1}{5^2}+\ldots\right)\ldots\left(1+\frac{1}{p}+\frac{1}{p^2}+\ldots\right)\ldots$$

byłaby skończona. Otworzyć nawiasy, skorzystać z podstawowego twierdzenia arytmetyki i z faktu, że suma $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{n}+\ldots$ odwrotności wszystkich liczb naturalnych jest nieskończona.

Zadanie 4. *Funkcja von Mangoldta* Λ jest określona wzorem

$$\Lambda(n)=\begin{cases}\log p & \text{jeżeli } n \text{ jest potęgą liczby pierwszej } p,\\ 0 & \text{w przeciwnym przypadku.}\end{cases} \tag{1}$$

Na przykład $\Lambda(2) = \Lambda(256) = \log 2$, $\lambda(6) = 0$. Udowodnić, że dla dowolnej liczby naturalnej $n > 1$ zachodzi

$$\log(n) = \sum_{d|n} \Lambda(d).$$

Zadanie 5. *Funkcja Möbiusa* μ jest określona wzorem

$$\mu(n) = \begin{cases} (-1)^k & \text{jeżeli } n \text{ jest iloczynem } k \text{ różnych liczb pierwszych,} \\ 0 & \text{w przeciwnym przypadku.} \end{cases}$$

Na przykład $\mu(2) = \mu(3) = -1$, $\mu(6) = 1$ oraz $\mu(256) = 0$. Udowodnić, że jeżeli $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$ jest funkcją oraz

$$g(n) = \sum_{d|n} f(d) \quad \text{dla każdego } n \ \ 1$$

to

$$f(n) = \sum_{d|n} \mu(d) g(n/d) \quad \text{dla każdego } n \ \ 1.$$

Wyprowadzić następujący wzór na funkcję von Mangoldta (1)

$$\Lambda(n) = -\sum_{d|n} \mu(d) \log d.$$

Zadanie 6. *Funkcja ζ (dzeta) Riemanna* jest zdefiniowana jako szereg nieskończony

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

(zbieżny dla $s > 1$). Wyprowadzić następujący wzór

$$\log \zeta(s) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{\log n} \cdot \frac{1}{n^s}$$

gdzie Λ to funkcja von Mangoldta (1). *Wskazówki: skorzystać ze wzoru Eulera wyrażającego funkcję ζ jako nieskończony iloczyn*

$$\zeta(s) = \prod_p \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1}$$

gdzie p przebiega wszystkie liczby pierwsze, oraz z szeregu Taylora funkcji $\log(1 + x)$.

Zadanie 7. Funkcję $f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{C}$ z liczb całkowitych do liczb zespolonych nazywamy *funkcją o skończonym nośniku* jeżeli $f(n) \neq 0$ tylko dla skończenie wielu n. *Transformatą Fouriera* takiej funkcji f nazywamy funkcję

$$\hat{f}(\theta) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(n) e^{-2\pi i n \theta} \tag{2}$$

dla $\theta \in \mathbb{R}$. Przypomnijmy wzór $e^{ix} = \cos x + i \sin x$. Udowodnić, że

$$f(n) = \int_0^1 \hat{f}(\theta) e^{2\pi i n \theta} d\theta$$

oraz wyprowadzić wzór

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} |f(n)|^2 = \int_0^1 |\hat{f}(\theta)|^2 d\theta.$$

Zadanie 8. Niech $f, g, h : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{C}$ będą funkcjami o skończonym nośniku, $\hat{f}$, $\hat{g}$, $\hat{h}$ ich transformatami Fouriera (2). Udowodnić, że

$$\sum_{a+b+c=N} f(a)g(b)h(c) = \int_0^1 \hat{f}(\theta)\hat{g}(\theta)\hat{h}(\theta) e^{2\pi i \theta N} d\theta.$$