Zadania kwalifikacyjne

Maciej Kolanowski

30 czerwca 2015

Streszczenie

Poniższe zadania zajmują dość dużo miejsca. Niektóre wymagają pomysłu, inne biegłości rachunkowej. Nie oczekuję, że wszyscy zrobią wszystko, ale zachęcam do prób, eksperymentów i zadawania pytań. Głównym celem tej procedury nie jest zrobienie przesiewu, a nauczenie Was pewnego formalizmu i przygotowanie do życia. Znaczy się, zajęć. Warsztaty mają służyć zabawie, zatem dobrej zabawy!

1 Relatywistyka

Antysystemowcy chcą zwiększyć maksymalną dopuszczalną prędkość w Polsce. Nie może być ona jednak za duża. Za zbyt dużą prędkość uznajemy taką, w której światło zielone wygląda na czerwone lub odwrotnie. Jaką mogą maksymalną prędkość zgłosić do przegłosowania?
Na zajęciach zajmiemy się problemem redshiftu w grawitacji, więc warto wiedzieć jak wygląda on w przypadku szczególnej teorii względności.

2 Równania różniczkowe

Rozwiąż następujący układ równań:

$$0 = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{fh}}\frac{d}{dr}\left[\frac{1}{\sqrt{fh}}f'\right] + \frac{f'}{rfh}$$

$$0 = -\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{fh}}\frac{d}{dr}\left[\frac{1}{\sqrt{fh}}f'\right] + \frac{h'}{rh^2}$$

$$0 = -\frac{f'}{2rfh} + \frac{h'}{2rh^2} + \frac{1-h^{-1}}{r^2}$$

gdzie, $f, h : U \to]0, \infty[$, $U \subset]0, \infty[$.
Jest to układ, który faktycznie pojawi się w naszych rozważaniach, więc warto poznać już teraz jego rozwiązania.
Podpowiedź: Proste operacje algebraiczne pozwalają istotnie zmniejszyć poziom komplikacji tych, na pozór strasznych, równań.

3 Geometria różniczkowa - elementy

Przed zapoznaniem się z dalszą częścią zadań zapraszam do zerknięcia do skryptu lub innego zamieszczonego materiału. Wszystkie poniższe pojęcia są tam wyjaśnione.
W całej tej sekcji (M, g) oznacza pseudoriemannowską rozmaitość z metryką o sygnaturze $(- + ++)$, ∇_a jest koneksją Levi - Cevity, a $\mathcal{L}$ to pochodna Lie, obowiązuje konwencja sumacyjna, chyba że stwierdzono inaczej.

3.1 Rozmaitości

Dokonując transformacji współrzędnych wyraź metrykę euklidesową na $\mathbb{R}^3$ we współrzędnych sferycznych. Czy jest ona wszędzie dobrze określona?
Będziemy kilkakrotnie współrzędne zmieniać, więc to konieczne ćwiczenie rachunkowe.

3.2 Wektory

Niech $f, g : M \to \mathbb{R}$ oraz $\dot{\mu} \in T_p(M)$. Pokaż, że:

$$\dot{\mu}(fg) = f(p)\dot{\mu}(g) + \dot{\mu}(f)g(p)$$

Niech X, Y będą polami wektorowymi. Pokaż, że:

$$[X, fY] = f[X, Y] + X(f)Y$$

Tłumaczenie:
Ponieważ Y jest polem wektorowym (czyli funkcją $\mathcal{M} \ni p \mapsto Y_p \in T_p\mathcal{M}$), a f funkcją, to fY też jest polem wektorowym. Konkretniej, przenosi ono $\mathcal{M} \ni p \mapsto f(p) \cdot Y_p \in T_p\mathcal{M}$.
To takie skalowanie, które wektory w różnych punktach wydłuża w inny sposób.
Z kolei X(f) to skrócony zapis na funkcję $\mathcal{M} \ni p \mapsto X_p(f) \in \mathbb{R}$.

3.3 Tensory

Zazwyczaj w OTW zakłada się, że tensor energii - pędu spełnia jakiś warunek, aby być uznanym za fizyczny. Jedną z możliwości jest tak zwany słaby warunek energetyczny:

$$T_{ab}v^a v^b \geqslant 0$$

Dla każdego wektora czasowego v. Szukałeś wektorów i wartości własnych tegoż tensora i znalazłeś:

$$T^a_b v^b_i = \lambda_i v^a_i$$

Przy czym v_0 jest czasowy, a v_1, v_2, v_3 przestrzenne. Jakie nierówności muszą spełniać λ_i, aby zachodził słaby warunek energetyczny? Możesz dla uproszczenia założyć, że wszystkie wartości własne są różne.
Podpowiedź: to zadanie ma na celu oswojenie się z notacją sumacyjną i abstract index notation, a nie sprawdzenie znajomości algebry.
Podpowiedź2: Spróbuj przedstawić dowolny wektor czasowy przy pomocy wektorów własnych tensora T^a_b.
Tensor energii pędu (jak każdy inny tensor) zadany jest przez swoje działanie na wektorach. Na razie powiem tyle, że jeżeli $g_{ab}u^a u^b = -1$, to można myśleć, że mamy fizycznego obserwatora który porusza się po krzywej całkowej zadanej przez u. Wówczas $T_{ab}u^a u^b$ jest gęstością energii mierzoną przez tego obserwatora. Więcej na ten temat powiemy sobie na warsztatach.

3.4 Pochodne i wektory Killinga

Wyznacz 3 liniowo niezależne wektory Killinga rozmaitości zadanej we współrzędnych kartezjańskich warunkiem:

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$$

Hint: to sfera zanurzona w $\mathbb{R}^3$. Jaka jest metryka na sferze? (Możesz posiłkować się zadaniem 3.1) Podpowiedź2: Jeżeli metryka nie zależy jawnie od którejś współrzędnej x,

to ∂_x jest wektorem Killinga.
To bardzo ważne zadanie, ponieważ będziemy szukać sferycznie symetrycznej metryki, więc musimy najpierw się dowiedzieć co to znaczy.
Wyznacz $\mathcal{L}_X g$.
Prowadzi to do pewnych równań różniczkowych, które muszą spełniać wektory Killinga. Wykorzystamy ten rezultat, gdy będziemy poszukiwać metryk z zadanymi symetriami.
Pokaż, że jeżeli $\mathcal{L}_X g = 0$, to $\nabla_{(a}X_{b)} = 0$ oraz $U^a X_a = const.$ (wzdłuż geodezyjnej!)
Rezultat ten łączy symetrie czasoprzestrzeni z zasadami zachowania i pozwoli nam na bezbolesny opis ruchu ciał swobodnych.
Niech V będzie polem wektorowym. Pokaż, że:

$$\nabla_a V^a = \frac{1}{\sqrt{|g|}}\partial_a\left(\sqrt{|g|}V^a\right)$$

gdzie g jest wyznacznikiem metryki.
Zależność ta zachodzi dla dowolnej rozmaitości i jest bardzo przydatna w tak zwanym życiu.

3.5 Tensory Riemanna i Ricciego, równanie Einsteina

Wyznacz tensor Riemanna dla następującej metryki:

$$ds^2 = -a^2x^2dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2$$

zdefiniowanej na $\{x > 0, t, y, z \in \mathbb{R}\}$.
Widzę przynajmniej dwa istotnie różne sposoby rozwiązania tego zadania. Oba sposoby (oczywiście dla innej metryki) zostaną użyte podczas warsztatów.
Pokaż, że równanie Einsteina w próżni bez stałej kosmologicznej jest równoważne:

$$R_{\mu\nu} = 0$$

Jest to, jak widać, odrobinę prostsza forma, więc przyda nam się to na warsztatach.
Niech $T_{\mu\nu}$ spełnia zerowy warunek energetyczny, to znaczy dla każdego zerowego wektora l^μ zachodzi:

$$T_{\mu\nu}l^\mu l^\nu \geqslant 0$$

Pokaż, że wtedy zachodzi:

$$R_{\mu\nu}l^\mu l^\nu \leqslant 0$$

Nie będziemy, przynajmniej planowo, korzystać z tej nierówności, ale jest ona absolutnie konieczna przy analizie równania Raychaudhuri dla zerowych geodezyjnych, które to stanowi fundament najważniejszych twierdzeń ogólnej teorii względności.

4 Zadania otwarte

Opisz swoje dotychczasowe doświadczenia z OTW. Pozwoli to lepiej dopasować program do poziomu uczestników. Jeżeli chcesz programować ostatniego dnia, koniecznie napisz w jakim języku!
Tu możesz wpisać absolutnie wszystkie rzeczy, które przychodzą Ci do głowy i którymi chcesz się podzielić. (Mogą one, ale nie muszą, mieć wpływ na proces kwalifikacji)
W szczególności, bardzo zalezy mi na tym, abyś napisał(a) czego od tych warsztatów oczekujesz.