Geometryczna Teoria Grup - zadania kwalifikacyjne na warsztaty w ramach WWW11

1 Zadania

Zadanie 1.1 (2p.)**.** Niech $(G, \circ)$ oraz $(H, \star)$ będą grupami z elementami neutralnymi oznaczanymi odpowiednio jako e i f. Na zbiorze $G \times H$ wprowadzamy działanie $\otimes$ wzorem $(a, b) \otimes (x, y) = (a \circ x, b \star y)$, tj. "po współrzędnych". Udowodnij, że $(G \times H, \otimes)$ jest grupą, wskaż jej element neutralny. Czy grupy $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$ i $\mathbb{Z}_6$ są izomorficzne? Uzasadnij swoją odpowiedź.

Zadanie 1.2 (6p.)**.** Każda część zadania 2. stąd jest warta 2 punkty. Proszę rozwiązanie/a wysłać osobno na każde warsztaty, gdzie ma(ją) być wykorzystane przy kwalifikacji.

Zadanie 1.3 (1p.)**.** Przypomnijmy, że grupa D_{12} to grupa izometrii własnych 6-kąta foremnego. Jakie są możliwe rzędy elementów D_{12}? Wymień elementy rzędu 2 i elementy rzędu 3.

Zadanie 1.4 (6p.)**.** (Przed tym zadaniem dobrze przeczytać fragment skryptu dotyczący grupy $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ oraz jej działania na $\mathbb{Z}^2$. Dobrze zwrócić uwagę, że dla każdego $A \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ przekształcenie $\mathbb{Z}^2 \to \mathbb{Z}^2$, zdefiniowane jako $v \mapsto Av$ dla $v \in \mathbb{Z}^2$, jest odwracalne.)

Wykaż, że macierze $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ nie spełniają żadnej nietrywialnej zależności w grupie $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$, tzn. dla dowolnych $k \geqslant 1$, $X_1, X_2, \ldots, X_k \in \{A, B\}$ takich, że $X_i \neq X_{i+1}$ dla $i = 1, \ldots, k-1$ oraz dowolnych liczb $a_1, a_2, \ldots, a_k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$

$$X_1^{a_1} X_2^{a_2} \ldots X_k^{a_k} \neq I_2.$$

Wskazówka:

Niech $S = \{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mid x, y \in \mathbb{Z}, |x| > |y|\}$ oraz $T = \{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mid x, y \in \mathbb{Z}, |x| < |y|\}$.

Wykaż, że $A^n T \subset S$ oraz $B^n S \subset T$ dla dowolnego $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$[1] i wyjaśnij, dlaczego w tym przypadku wynika stąd teza.

[1] Definiujemy $A^n T = \{A^n t \mid t \in T\}$, $B^n S = \{B^n s \mid s \in S\}$.