Rozwiązania zadań wyślij na adres konrad.jan.szymanski@gmail.com. Chętnie pomogę w rozwiązywaniu zadań, więc jeżeli masz problem z jakimś, nie wstydź się i napisz.

I. ZADANIE 1

Oblicz następujące wyrażenia:

1. $\frac{\mathrm{d}\, f^2(x)}{\mathrm{dx}}$ (pochodna kwadratu dowolnej funkcji),
2. $\frac{\mathrm{d}\cos(x)}{\mathrm{dx}}$,
3. $\frac{\mathrm{d}\, x^2}{\mathrm{dx}}$,
4. $\frac{\mathrm{d}\, \mathrm{arc\,tg}(x)}{\mathrm{dx}}$ (najlepiej skorzystać z twierdzenia o pochodnej funkcji odwrotnej),
5. $\int x^2 \,\mathrm{dx}$,
6. $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \,\mathrm{dx}$.

II. ZADANIE 2

Równanie różniczkowe to równanie opisujące pewną nieznaną funkcję przez jej wartości i pochodne. Weźmy za przykład równanie opisujące ewolucję liczby atomów pierwiastka promieniotwórczego N w funkcji czasu t:

$$\frac{\mathrm{d}\, N}{\mathrm{dt}} = -\lambda N. \tag{1}$$

Oznacza to tyle, że w krótkim przedziale czasu Δt rozpadowi ulegnie $\lambda N \Delta t$ atomów (prawdopodobieństwo rozpadu pojedyńczego atomu nie zależy od całkowitej ilości materiału). Można zastosować nieładnie z punktu matematyki wyglądający trik polegający na „obustronnym pomnożeniu" przez dt (nie jest on tak znów nieuzasadniony, są popierające go twierdzenia):

$$\mathrm{dN} = -\lambda N \,\mathrm{dt}\,. \tag{2}$$

Podzielmy teraz obustronnie przez N:

$$\frac{\mathrm{dN}}{N} = -\lambda \,\mathrm{dt}\,. \tag{3}$$

I obustronnie scałkujmy:

$$\ln N = -\lambda t + C. \tag{4}$$

Ostatecznie:

$$N(t) = N_0 \exp(-\lambda t), \tag{5}$$

gdzie zebrano stałą do wartości N_0. Widać więc, że liczba atomów zanika eksponencjalnie w czasie.

Zadanie polega na rozwiązaniu równania oscylatora harmonicznego:

$$\frac{\mathrm{d}^2\, x}{\mathrm{dt}^2} = -kx \tag{6}$$

Hint: pomnóż obustronnie przez $\frac{\mathrm{d}\, x}{\mathrm{dt}}$ i wpatruj się intensywnie w otrzymane równanie, aż zobaczysz pierwszy i ostatni punkt poprzedniego zadania.

III. ZADANIE 3

Oblicz potencjał elektryczny lub wektor pola elektrycznego jako funkcję współrzędnych w sytuacji, gdy jedynym ładunkiem jest odcinek o długości l z jednorodnym ładunkiem liniowym λ. Krańce odcinka znajdują się w punktach $(0, 0, -l/2), (0, 0, l/2)$. Możesz użyć dowolnych współrzędnych, jakie uznasz za odpowiednie.

IV. ZADANIE 4

Niemagnetyczna pętla o masie m i całkowitym oporze R wykonana z cienkiego drutu w kształcie okręgu o promieniu r leży na wyjściu dużego elektromagnesu — tak, że pole magnetyczne w obszarze pętli jest prawie jednorodne. Na początku indukcja pola magnetycznego w obszarze pętli wynosi B, zanika ona bardzo szybko. Oblicz, jak wysoko pętla podskoczy. Przyspieszenie ziemskie wynosi g.

V. ZADANIE 5

Oblicz zachowanie naładowanej kulki (ładunek q, masa m) w stanie stacjonarnym (tj. porusza się ruchem okresowym), gdy znajduje się ona w liniowo spolaryzowanej fali płaskiej:

$$\begin{aligned} \vec{E} &= \vec{x} E_0 \cos(\omega t) \\ \vec{B} &= \vec{y} B_0 \cos(\omega t) \end{aligned} \tag{7}$$

Załóż, że kulka jest przymocowana do pewnego punktu w przestrzeni sprężyną o stałej k. Zmienność przestrzenną pól można pominąć (tak jak wyżej, jest to uzasadnione, gdy kulka ma niewielką amplitudę drgań w porównaniu do długości fali).

VI. ZADANIE 6

Nieskończona płaszczyzna ma ładunek powierzchniowy:

$$\sigma(x, y) = \sigma_0 \sin(ux + vy), \tag{8}$$

gdzie u, v, σ_0 to ustalone stałe. Oblicz potencjał lub pole elektryczne w całej przestrzeni. Hint: podziel płaszczyznę w odpowiedni sposób.