Matematyka - zrób to sam! II

Paweł Karasek i Damian Orlef

Zadanie 1

Udowodnij, że w każdym odcinku $[a, b]$ dla $a < b$ istnieje co najmniej jedna liczba ze zbioru

$$\{\sqrt{p} - \sqrt{q} : p, q \in \mathcal{P}\},$$

gdzie $\mathcal{P}$ oznacza zbiór liczb pierwszych.

Podpowiedź: można korzystać z silnych rezultatów asymptotycznych jak np. tw. o liczbach pierwszych, które orzeka, że

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\pi(x)}{x/\log x} = 1,$$

gdzie $\pi(x)$ *oznacza liczbę liczb pierwszych zawartych w odcinku* $[1, x]$*, a* $\log$ *oznacza logarytm naturalny.*

Zadanie 2

Dana jest nieskończona tablica

$$\begin{pmatrix}
1 & & & & & & \\
1 & 1 & & & & & \\
1 & 2 & 2 & & & & \\
1 & 3 & 5 & 5 & & & \\
1 & 4 & 9 & 14 & 14 & & \\
1 & 5 & 14 & 28 & 42 & 42 & \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots
\end{pmatrix}.$$

Odgadnij, jaka reguła determinuje wartość poszczególnych wyrazów. Następnie określmy ciąg $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, którego n-ty wyraz to n-ty element diagonali, tzn. $(a_n) = (1, 1, 2, 5, 14, 42, \dots)$. Oblicz sumę szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{4^n}.$$

Zadanie 3

Wielościan wypukły ma każdy wierzchołek stopnia 3 a każda jego ściana to czworokąt lub sześciokąt. W każdej ze ścian czworokątnych umieszczono ananas. Znajdź liczbę ananasów w tym wielościanie.

Zadanie 4

Udowodnij, że liczba zespolona $z = \frac{3}{5} + \frac{4}{5}i$ nie spełnia równania $z^n = 1$ dla żadnego $n \geqslant 1$ naturalnego.

Zadanie 5

W pewnym miejscu na Ziemi znajduje się stos n kamieni. W jego pobliżu Kiki i Buba grają w następującą grę. Każde z graczy na zmianę podczas swojej tury musi zabrać dokładnie $p-1$ kamieni dla wybranej przez siebie liczby pierwszej p. Zwycięża ten, kto zabrał ostatni kamień. Zaczyna Kiki. Uzasadnij, że istnieje nieskończenie wiele n, dla których Buba ma strategię wygrywającą. Stawką jest ananas.

Zadanie 6

Ciągi liczb naturalnych $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ oraz $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ są dane za pomocą układu równań rekurencyjnych

$$\begin{cases} x_{n+1} = 3x_n + 4y_n \\ y_{n+1} = 2x_n + 3y_n \end{cases}$$

przy warunku początkowym $x_1 = y_1 = 1$. Uzasadnij, że dla każdych $p \in \mathcal{P}$ oraz $n \in \mathbb{N}$ jest prawdą, że jeśli $p | y_n$, to $p \equiv 1 \bmod 4$.