Zadania kwalifikacyjne

Teoria obliczeniowa równań diofantycznych

Należy spróbować zrobić jak najwięcej z poniższych zadań.
Oznaczenia:
$\mathbb{Z}$ - zbiór liczb całkowitych
$\mathbb{N}$ - zbiór liczb naturalnych

1 Zadanie

Niech $D(X_1, ..., X_m) = 0$ (1) będzie pewnym równaniem diofantycznym. Szukamy jego rozwiązań w liczbach całkowitych $X_1, .., X_m$.
Rozważmy teraz równanie $D(x_1 - y_1, ..., x_m - y_m)$ (2).
Widać, że dowolne rozwiązanie równania (2) w liczbach naturalnych $x_1, ..., x_m, y_1, ..., y_m$ generuje rozwiązanie równania (1) w liczbach całkowitych $X_1, ..., X_m$:

$$\begin{cases} X_1 = x_1 - y_1 \\ X_2 = x_2 - y_2 \\ ... \\ X_m = x_m - y_m \end{cases}$$

Z drugiej strony, dla każdego rozwiązania równania (1) $X_1, ..., X_m \in \mathbb{Z}$ można znaleźć takie $x_1, ..., x_m, y_1, .., y_m \in \mathbb{N}$ spełniające powyższy układ równań i będące przez to rozwiązaniami (2).
Postępowanie w ten sposób w celu stwierdzenia czy równanie (1) ma rozwiązania w liczbach całkowitych dwukrotnie zwiększa liczbę niewiadomych.
Pokazać, że można stwierdzić, czy równanie (1) ma rozwiązania całkowite, redukując ten problem do znajdowania rozwiązań naturalnych pewnego równania diofantycznego o m niewiadomych.

2 Zadanie

Pokazać, że następujące zbiory są diofantyczne:
a) zbiór wszystkich liczb złożonych
b) zbiór wszystkich liczb, które nie są potęgami dwójki
c) zbiór wszystkich liczb, które nie są kwadratami liczb całkowitych

3 Zadanie

Pokazać, że relacja *a nie jest potęgą b* jest diofantyczna.

4 Zadanie

Pokazać, że dopełnienie zbioru diofantycznego określonego równaniem z jedną niewiadomą jest diofantyczne.

5 Zadanie

Udowodnić, że

$$\sqrt{1+\sqrt{\frac{3}{4}}}\cdot(2+\sqrt{3})^n - \sqrt{1-\sqrt{\frac{3}{4}}}\cdot(2-\sqrt{3})^n$$

jest całkowite dla każdego $n \in \mathbb{N}$.

6 Zadanie

Pokazać, że dla każdego zbioru diofantycznego $\mathfrak{M}$ liczb naturalnych istnieją wielomiany P, Q o całkowitych współczynnikach takie, że zbiór $\mathfrak{M}$ stanowi dokładnie zbiór wszystkich całkowitych wartości przyjmowanych przez wyrażenie:

$$\frac{P(x_0, ..., x_m)}{Q(x_0, ..., x_m)}$$

dla naturalnych wartości zmiennych.

7 Zadanie

Udowodnić, że równanie

$$a^2 + b^2 + c^2 = 3abc - 3$$

ma nieskończenie wiele rozwiązań całkowitych.

8 Zadanie

Niech $n \geq 2$ będzie taką liczbą całkowitą, że równanie

$$x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2 = x_1 x_2 ... x_n$$

ma co najmniej jedno rozwiązanie w dodatnich liczbach całkowitych. Udowodnić, że równanie to ma nieskończenie wiele rozwiązań w dodatnich liczbach całkowitych.

9 Zadanie

Znaleźć wszystkie liczby $n \in \mathbb{N}$ takie, że istnieje ciąg liczb naturalnych $a_1, ..., a_n$ spełniający:

$$a_{k+1} = \frac{a_k^2 + 1}{a_{k-1} + 1} - 1$$

dla każdego k spełniającego $2 \leq k \leq n - 1$.

10 Zadanie

$k \in \mathbb{N}$. Pokazać, że jeśli istnieje ciąg $a_0, a_1, ...$ liczb całkowitych spełniających warunek:

$$a_n = \frac{a_{n-1} + n^k}{n}$$

dla każdego $n \geq 1$, to $k - 2$ jest podzielne przez 3.