Zadania kwalifikacyjne z teorii mnogości

Damian Głodkowski

termin oddania: 5 lipca

Kilka definicji:
Powiemy, że $f : A \to B$ jest surjekcja, kiedy $\forall_{b \in B} \exists_{a \in A} f(a) = b$.
Powiemy, że $f : A \to B$ jest injekcja, kiedy $\forall_{x,y \in A} f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$.
Powiemy, że $f : A \to B$ jest bijekcja, kiedy f jest injekcja i surjekcja.
Powiemy, że zbiory A i B sa równoliczne ($|A| = |B|$), kiedy istnieje bijekcja $f : A \to B$.
Powiemy, że zbiór jest przeliczalny, jeśli jest równoliczny z $\mathbb{N}$.

zad. 1.
Udowodnij nastepujace fakty:

- $|\mathbb{N}| = |\mathbb{Z}|$
- $|\mathbb{N}| = |\mathbb{Q}|$
- $|A| = |B| \wedge |C| = |D| \Rightarrow |A \times C| = |B \times D| \wedge |A^C| = |B^D|$
- $|(A^B)^C| = |A^{B \times C}|$
- $|(A \times B)^C| = |A^C \times B^C|$
- $B \cap C = \emptyset \Rightarrow |A^{B \cup C}| = |A^B \times A^C|$

gdzie:

- $\mathbb{N}$ jest zbiorem liczb naturalnych.
- $\mathbb{Z}$ jest zbiorem liczb całkowitych.
- $\mathbb{Q}$ jest zbiorem liczb wymiernych.
- $A \times B$ jest iloczynem kartezjańskim zbiorów A i B.
- A^B jest zbiorem wszystkich funkcji $f : B \to A$.

zad. 2.
Udowodnij, że jeśli istnieje surjekcja $f : A \to B$ oraz injekcja $g : A \to B$ to $|A| = |B|$.

Kilka definicji:
Cześciowym porzadkiem na zbiorze X nazywamy relacje $\leq$, która spełnia nastepujace warunki:
$\forall_{a,b,c \in X}$:

- $a \leq a$
- $a \leq b \wedge b \leq a \Rightarrow a = b$
- $a \leq b \wedge b \leq c \Rightarrow a \leq c$

Zbiorem cześciowo uporzadkowanym nazywamy pare $(X, \leq)$.
Cześciowy porzadek nazywamy liniowym, jeśli $\forall_{a,b} \ \ a \leq b \vee b \leq a$.
Liniowy porzadek nazywamy dobrym, jeśli każdy podzbiór danego zbioru dobrze uporzadkowanego ma element najmniejszy wzgledem tego porzadku (a jest najmniejszym elementem, jeśli $\forall_b b \leq a \Rightarrow b = a$).
Zbiory cześciowo uporzadkowane $(X, \leq_X)$ i $(Y, \leq_Y)$ nazywamy izomorficznymi, jeśli istnieje bijekcja $f : X \to Y$ zachowujaca porzadek, tzn. $x \leq_X y \Leftrightarrow f(x) \leq_Y f(y)$.

zad. 3.
Udowodnij, że cześciowo uporzadkowany przeliczalny zbiór jest liniowo uporzadkowany wtedy i tylko wtedy, gdy jest izomorficzny z pewnym podzbiorem $(\mathbb{Q}, \leq)$

zad. 4.
Udowodnij, że liniowy porzadek jest izomorficzny z pewnym podzbiorem zbioru $(\mathcal{P}(\mathbb{N}), \subseteq)$ (gdzie $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ jest zbiorem potegowym zbioru liczb naturalnych) wtedy i tylko wtedy, gdy jest izomorficzny z pewnym podzbiorem $(\mathbb{R}, \leq)$

zad. 5.
Udowodnij, że każdy zbiór dobrze uporzadkowany równoliczny z $\mathbb{R}$ jest izomorficzny z pewnym podzbiorem $(\mathcal{P}(\mathbb{R}), \subseteq)$

Definicja:
Odcinek poczatkowy w zbiorze liniowo uporzadkowanym X to podzbiór $O \subseteq X$ taki, że $\forall_{x,y \in X} (x \in O \wedge y \leq x) \Rightarrow y \in O$.

zad. 6.
Niech $(X, \leq)$ bedzie zbiorem liniowo uporzadkowanym. Udowodnij, że nastepujace warunki sa równoważne:
1. Porzadek $\leq$ jest dobry.
2. Każdy odcinek poczatkowy w zbiorze X, rózny od X jest postaci $O(x) = \{y : y \in X, y < x\}$ dla pewnego $x \in X$.
3. Żaden ciag o wyrazach w zbiorze X nie jest ciagiem ściśle malejacym w sensie porzadku $\leq$.

Zadań nie dziele na obowiazkowe i nieobowiazkowe, chciałbym żebyście spróbowali zrobić wszystkie - jeśli sie nie uda, wyślijcie to co zrobiliście. Jeśli liczba chetnych przekroczy liczbe miejsc, na warsztaty zostana zakwalifikowane osoby, które przyśla najwiecej poprawnych rozwiazań. W razie potrzeb zadawajcie pytania.

Kontakt (oraz adres do przysyłania rozwiazań): damiang0071@gmail.com