

Problemy

Zadanie 1. Zapoznaj się z definicją splotu Dirichleta. Uzasadnij, że $\varphi * 1 = \text{id}$, gdzie φ oznacza funkcję Eulera (tocjent), funkcja id jest funkcją identycznościową, tj. zadaną wzorem $\text{id}(n) = n$, natomiast $1(n) = 1$ (wszystko tutaj rozważamy dla $n \in \mathbf{Z}^+$).

Zadanie 2. Wykaż, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ jest zbieżny dla $s > 1$ oraz robieżny dla $s \leq 1$.

Zadanie 3. (*) Uzasadnij, że granica $\lim_{s \rightarrow 1^+} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} - \frac{1}{s-1} \right)$ istnieje.

Zadanie 4. Zapoznaj się z definicją całki funkcji zmiennej zespolonej wzdłuż krzywej. Niech γ oznacza kwadrat o wierzchołkach ulokowanych w punktach $0, 1, 1 + i, i$ (zorientowany przeciwnie do ruchu wskazówek zegara, choć tutaj akurat to nie ma większego znaczenia). Powołując się tylko na definicję całki, uzasadnij, że

$$\int_{\gamma} dz = 0.$$