Zadania kwalifikacyjne

Jakub Mrożek

1 czerwca 2016

Termin oddawania zadań mija wtedy, kiedy jest napisane na stronie że mija. W razie niezrozumienia notacji polecam najpierw sprawdzić notkę na końcu tego dokumentu, w której pewne rzeczy są wyjaśnione. Jeżeli wyjaśnienie jest niewystarczające, zachęcam do kontaktu. W zadaniach z fizyki należy kilka rzeczy samemu założyć. Niektóre zadania mają z tego względu pewną dozę dowolności, ale nie należy się jej bać, tylko kreatywnie wykorzystać.

Problem 1. Pochodne cząstkowe

w jest funkcją zmiennych x, y oraz z. Pokaż:

(a)

$$\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_{y,z} = \frac{1}{\left(\frac{\partial x}{\partial w}\right)_{y,z}}$$

(b)

$$\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_{y,z}\left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)_{w,y}\left(\frac{\partial z}{\partial w}\right)_{y,x} = -1$$

Problem 2. Wincyj cząstkowych

A oraz B są funkcjami zmiennych x i y, a poza tym $A/B = C$. Udowodnij

$$\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_C = \frac{\left(\frac{\partial(\ln B)}{\partial y}\right)_x - \left(\frac{\partial(\ln A)}{\partial y}\right)_x}{\left(\frac{\partial(\ln A)}{\partial x}\right)_y - \left(\frac{\partial(\ln B)}{\partial x}\right)_y}$$

Problem 3. Całeczki

(a) Znaną całką oznaczoną jest $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi}$. Znając ten wynik, oblicz $\int_0^{\infty} \sqrt{x}e^{-x}dx$

(b) Oblicz następujące całki krzywoliniowe

i) $\int_L y^2dx + x^2dy$, gdzie L to górna połowa elipsy $x = a\cos\theta$, $y = b\sin\theta$ zgodnie z ruchem wskazówek zegara

ii) $\int_L xy^2dx + xydy$, gdzie L to część krzywej $x = y^{-\frac{5}{3}}$ między punktami $(1, 1)$ a $(2^5, \frac{1}{2^3})$

Problem 4. Kula

W pewnym momencie będziemy potrzebowali policzyć objętość n-wymiarowej kuli, czyli zbioru punktów odległych o mniej niż wartość promienia R od pewnego ustalonego punktu. Mowa tu o pewnym uogólnieniu objętości, które można rozumieć jako proporcjonalną do liczby równoodległych punktów znajdujących się wewnątrz kuli. Dla $n = 2$ jest to więc powierzchnia koła, dla $n = 3$ - objętość zwyczajnej kuli. Wydawałoby się, że policzenie takiej uogólnionej objętości jest trudne. Jest jednak jeden trik, który może nam w tym pomóc. Po pierwsze, łatwo przekonać się (na przykład wypisując i przyglądając się n-wymiarowej całce), że objętość n-wymiarowej kuli o promieniu R to $V_n(R) = V_nR^n$, gdzie V_n to pewna stała, a konkretnie objętość kuli o promieniu 1. Znamy kilka początkowych wyrazów ciągu V_n, konkretnie $V_1 = 2$, $V_2 = \pi$, $V_3 = \frac{4}{3}\pi$. (Uwaga - pierwsze V_n oznacza funkcję jednej zmiennej - promienia, czyli objętość n-kuli o promieniu R. Tak więc $V_n = V_n(1)$.)
Na początek weźmy teraz zwykłą kulę i wytnijmy z niej płaszczyznę przechodzącą przez środek. Jest to koło. Ustalmy na powierzchni tego koła współrzędne biegunowe (r, θ). Teraz weźmy dowolny kawałek

powierzchni tego koła o współrzędnych (r, θ). Aby policzyć objętość kuli, należy wziąć wysokość słupa rozciągającego się od górnej do dolnej powierzchni kuli, przechodzącego przez nasz punkt, pomnożyć ją przez powierzchnię naszego kawałka i scałkować. Wysokość słupa wynosi $2\sqrt{R^2 - r^2}$, gdzie R to promień kuli. Czynnik 2 to jednak objętość kuli jednowymiarowej, czyli po prostu długość odcinka rozciągającego się z punktu -1 do punktu 1.

Bardzo podobnie możemy postąpić w przypadku n-wymiarowym. Weźmy zwykłą, dwuwymiarową płaszczyznę przechodzącą przez środek naszej kuli i ustalmy na niej współrzędne biegunowe (r, θ). Każdy punkt to środek kuli $(n-2)$-wymiarowej, o promieniu $\sqrt{R^2 - r^2}$. Aby policzyć uogólnioną objętość n-kuli, bierzemy objętość $(n-2)$-kuli o środku w jakimś punkcie i mnożymy ją przez element powierzchni w okolicy tego punktu a następnie całkujemy. Wobec tego objętość n-kuli o promieniu R można wyrazić poprzez:

$$V_n R^n = V_n(R) = \int_0^R \int_0^{2\pi} V_{n-2}(\sqrt{R^2 - r^2}) r dr d\theta$$

Korzystając z wyniku powyżej uzyskaj wzór rekurencyjny ciągu (V_n) i wypisz jego wyrazy do $n = 6$.

Problem 5. Perpetuum mobile

Zasugerowano następującą konstrukcję perpetuum mobile. Na dnie wysokiego, pionowego walca znajduje się woda, która wycieka z niego przez otwór i napędza turbinę. Energia uzyskana dzięki pracy turbiny przekształcana jest w ciepło, które podgrzewa wodę. Walec może być dowolnie wysoki, a wody dowolnie dużo, ponieważ zaś prędkość wyciekania zależy od wysokości słupa wody, możliwe jest umieszczenie w walcu tyle wody, że wystarczy energii na podgrzanie wody i jeszcze trochę zostanie. Całość zamknięta jest w większym walcu, na górnej powierzchni którego woda skrapla się i powraca do wewnętrznego walca równie szybko, jak z niego wypływa. W ten sposób uzyskujemy nieskończoną energię. Gdzie tu jest błąd?

Problem 6. Gaz doskonały

W pionowo ustawionym cylindrze zamkniętym tłokiem znajduje się w stanie równowagi n moli jednoatomowego gazu doskonałego o temperaturze T_0. Układ jest izolowany cieplnie od otoczenia. Gaz ściśnięto za pomocą tłoka, wykonując nad gazem pracę W. Następnie tłok puszczono i zatrzymał się on w nowym położeniu równowagi. Jaka jest temperatura końcowa gazu? Ciśnienie zewnętrzne jest stałe.

Problem 7. Gaz fotonowy i cykl Carnota

Na warsztatach zajmiemy się między innymi gazem fotonowym. Jest to system złożony z promieniowania elektromagnetycznego zamkniętego w pustym wgłębieniu o dowolnej objętości V. Można pokazać, i zrobimy to na warsztatach, następujące relacje: Energia wewnętrzna gazu fotonowego $U = bVT^4$, równanie stanu gazu fotonowego $p = bT^4$ oraz prawo odwracalnej przemiany adiabatycznej $pV^{\frac{4}{3}} = const$. Stała b jest znana.

Dysponując tymi informacjami pokaż, że efektywność cyklu Carnota, gdzie substancją roboczą jest właśnie gaz fotonowy, wynosi tyle ile trzeba, czyli $\eta = 1 - \frac{T_1}{T_2}$.

Problem 8. Wieloryb w kosmosie

Powtarzającym się motywem w niektórych utworach science fiction są pływające przez kosmos wieloryby. Pewien płetwal błękitny unosi się nad powierzchnią gwiazdy bardzo podobnej do naszego Słońca, w odległości $2R$ od jej środka, gdzie R to promień gwiazdy. Jego prędkość względem gwiazdy wynosi 0. Zakładając, że unosi się dzięki ciśnieniu promieniowania wywieranego na niego przez Słońce, oblicz temperaturę Słońca. Następnie oszacuj równowagową temperaturę powierzchni wieloryba. Czy wieloryb ma szansę przetrwać? Załóż, że zarówno Słońce jak i wieloryb to ciała doskonale czarne.

Uwagi końcowe W termodynamice licząc pochodne cząstkowe zaznaczamy, które zmienne są chwilowo ustalone. Na przykład $\left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_{p,V}$ oznacza pochodną energii wewnętrznej U po temperaturze, przy ustalonych ciśnieniu i objętości. Jeżeli któregoś zabraknie, na przykład napiszemy $\left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_p$, należy założyć, że jest to zmienna, i wyrazić ją jako funkcję zmiennej, po której liczona jest pochodna, albo posłużyć się regułą łańcuchową.