Zadania kwalifikacyjne na warsztaty z liczb zespolonych w geometrii

W razie znalezienia błędów w treści zadań proszę o kontakt.

Przekonać się (i przekonać mnie o akcie przekonania się), że:

0.0 Każda izometria płaszczyzny ma postać $x \mapsto ax + b$ lub $x \mapsto a\overline{x} + b$, gdzie $|a| = 1$.

0.1 Punkty $0, x, y$ są współliniowe wtw gdy $\frac{x}{y} \in \mathbb{R}$, czyli $x\overline{y} = \overline{x}y$.

0.2 Proste przechodzące przez $0, x$ oraz $0, y$ są prostopadłe wtw gdy $\frac{x}{y} \in i\mathbb{R}$, czyli $x\overline{y} + \overline{x}y = 0$.

0.3 Standardowy iloczyn skalarny na $\mathbb{R}^2$ spełnia $\langle x, y\rangle = \mathrm{Re}\overline{x}y = \mathrm{Re}x\overline{y}$.

0.4 Zachodzi wzór skróconego mnożenia $|x + y|^2 = |x|^2 + |y|^2 + 2\mathrm{Re}\overline{x}y$.

0.5 Obrazem inwersyjnym x względem okręgu jednostkowego jest $\overline{x}^{-1}$.

0.6 Punkt x leży na biegunowej punktu y względem okręgu jednostkowego wtw gdy $\mathrm{Re}\overline{x}y = 1$.

Udowodnić następujące fakty.

1.1 Punkty p, q, r sa współliniowe wtedy i tylko wtedy, gdy $\overline{p}q+\overline{q}r+\overline{r}p = p\overline{q} + q\overline{r} + r\overline{p}$.

1.2 Trójkąt o wierzchołkach a, b, c jest równoboczny wtedy i tylko wtedy, gdy $a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ca$.

1.3 Jeśli $|a| = |b| = 1$, to rzutem c na prostą przechodzącą przez a, b jest $\frac{1}{2}(a + b + c - ab\overline{c})$.

1.4 Jeśli $|a| = |b| = |c| = |d| = 1$, to punktem przecięcia prostych przechodzących przez a, b i c, d jest $\frac{ab(c+d)-cd(a+b)}{ab-cd}$.

1.5 Punkty $0, a, b, c$ leżą na jednym okręgu lub są współliniowe wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\begin{vmatrix} a & \overline{a} & |a|^2 \\ b & \overline{b} & |b|^2 \\ c & \overline{c} & |c|^2 \end{vmatrix} = 0.$$

1.6 Proste przechodzące przez pary punktów x_1, x_2, y_1, y_2, z_1, z_2 przecinają się w jednym punkcie lub są równoległe wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\begin{vmatrix} x_1 - x_2 & \overline{x_1} - \overline{x_2} & x_1\overline{x_2} - \overline{x_1}x_2 \\ y_1 - y_2 & \overline{y_1} - \overline{y_2} & y_1\overline{y_2} - \overline{y_1}y_2 \\ z_1 - z_2 & \overline{z_1} - \overline{z_2} & z_1\overline{z_2} - \overline{z_1}z_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Rowiązać następujące zadania. Można powoływać się bez dowodu na fakty **1.1-1.6**.

2.1 Na bokach dowolnego trójkąta zbudowano na zewnatrz trójkąty równoboczne. Udowodnić, że ich środki ciężkości tworzą trójkąt równoboczny.

2.2 Dany jest taki sześciokąt wypukły $ABCDEF$, że $AC = DF$, $CE = BF$, oraz $EA = BD$. Wykazać, że odcinki łączące środki przeciwległych boków tego sześciokąta przecinają się w jednym punkcie.

2.3 Czworokąt $ABCD$ jest wpisany w okrąg. Punkty P, Q, R to rzuty punktu D na proste odpowiednio BC, CA, AB. Wykazać, że $PQ = QR$ wtedy i tylko wtedy, gdy duwsieczne kątów ABC i ADC przecinają się na prostej AC.

2.4 Nieprostokątny trójkat ABC jest wpisany w okrąg o o środku O. Punkt H jest jego ortocentrum, punkty M, N są odpowiednio środkami odcinków BH i CH. Czworokąt $HOMN$ można wpisać w okrąg. Odcinek BB' jest średnicą okręgu o. Udowodnić, że $2B'N = AC$.

2.5 Dany jest okrąg o środku O i parami różne punkty $A, B, C \neq O$ takie, że zadne dwa nie są współliniowe z O. Punkt A' jest przecięciem biegunowej punktu B i biegunowej punktu C względem tego okręgu. Analogicznie określamy B', C'. Udowodnić, że proste AA', BB', CC' przecinają się w jednym punkcie lub są równoległe.

2.6 Wewnątrz trójkata ABC obrano punkt M. Udowodnić, że wówczas zachodzi nierówność

$$\frac{BM \cdot CM}{BA \cdot CA} + \frac{CM \cdot AM}{CB \cdot AB} + \frac{AM \cdot BM}{AC \cdot BC} \geqslant 1.$$