Programowanie Funkcyjne - zadania

Radosław Rowicki

1 czerwca 2017

Informacje wstępne:

1. Zadania wysyłamy na adres radrowicki@gmail.com. Chciałbym, żeby w temacie wiadomości było zawarte słowo "WWW", a w treści imię i nazwisko kandydata.
2. Wszystkie zadania typu "napisz funkcję" można zaprogramować w dowolnym języku programowania (ale w takim, w którym w ogóle występują funkcje lub metody...), pseudokodzie lub matematyce **bez używania jakichkolwiek pętli i tym bardziej instrukcji goto**. Można natomiast korzystać z rekurencji.
3. Nie trzeba zrobić wszystkich zadań, ale warto przynajmniej spróbować.
4. Nie korzystamy z chamskich gotowców (jak jest polecenie 'napisz funkcję która mnoży' oczywiste jest, że nie korzystamy z mnożenia ani dzielenia).
5. Przy rozwiązaniach w prawdziwych językach programowania liczba rzeczywista może być interpretowana jako dowolny typ zmiennoprzecinkowy.
6. Polecam niektóre punkty opisać matematycznie lub pseudokodem, gdyż wiele typowych języków programowania nie dopuszcza przyjmowania funkcji jako argumentu. Jednakże nie mam nic przeciwko rozwiązaniom typu opakowanie funkcji w klasę, użycie wskaźników na funkcje, lambdy z Java8/C++11 itp. Jeśli jednak chcesz mieć możliwość fizycznego przetestowania swojej implementacji, to z powszechnie znanych języków powinien nadać się JavaScript.
7. W razie jakichkolwiek wątpliwości - pisz.

Zad 1. Napisz funkcję która:

1. Przyjmie liczbę naturalną n i zwróci liczbę naturalną, która jest najbliżej $\sqrt{n}$. (3 pkt)

2. Przyjmie funkcję $f \in (\mathbb{R} \to \mathbb{R})$ i zwróci funkcję o takiej samej dziedzinie i przeciwdziedzinie, której wykres otrzymuje się przez przesunięcie wykresu funkcji f w lewo o 1 i dwukrotnym spłaszczeniu (powinowactwo prostokątne) w pionie. (4 pkt)

3. Przyjmie wartość rzeczywistą ϵ i zwróci funkcję, która przyjmuje funkcję i zwraca funkcję, która jest jej ilorazem różnicowym (pochodną) przy zadanym ϵ. (5 pkt)

Zad 2. Dowiedz się, czym jest *rekurencja ogonowa* oraz *złożoność czasowa i pamięciowa algorytmu* i opisz mi swoimi słowami, na czym to polega. Zależy mi na tym, byś udowodnił mi, że rozumiesz o co chodzi, więc liczę na dość nieformalne wytłumaczenie. (po 2 pkt)

Zad 3. Wyposażony w wiedzę z poprzedniego zadania, napisz funkcję (zważając na zadaną złożoność) która:

1. Obliczy silnię n.
   - Czasowa: $O(n)$, Pamięciowa stała (3 pkt)
   - Czasowa: $O(n)$, Pamięciowa $O(n)$ (1 pkt)

2. Obliczy k-tą potęgę liczby n.
   - Czasowa: $O(\log_2 k)$, Pamięciowa stała (6 pkt)
   - Czasowa: $O(\log_2 k)$, Pamięciowa $O(\log_2 k)$ (4 pkt)
   - Czasowa: $O(k)$, Pamięciowa stała (3 pkt)
   - Czasowa: $O(k)$, Pamięciowa $O(k)$ (1 pkt)

W każdym podpunkcie oceniony będzie tylko najwyżej punktowany wariant.

Zad 4. Określ typ[1] obiektu[2]:

1. Funkcja z zadania 1, pkt. 3. (3 pkt)

2. f gdzie $f(x) = g$, gdzie $g(y) = x + y$. (3 pkt)

3. $f(5)$ gdzie $f(x) = g$, gdzie $g(y) = x + y$. (2 pkt)

4. $f(5)(6)$ gdzie $f(x) = g$, gdzie $g(y) = x + y$. (1 pkt)

[1]To zadanie może wyglądać dość niejednoznacznie, więc żeby uniknąć wątpliwości, typem obiektu f będziemy nazywać taki zbiór A, że $f \in A$ oraz A jesteśmy w stanie zdefiniować bez użycia nawiasów klamrowych (tj. $\{f\}$ nie przejdzie...)

[2]To niekoniecznie musi być funkcja

5. $\lambda f.\lambda x.f(fx)$. (3 pkt)

Zad 5. Pokaż, że zbiory $A \to (B \to C)$ oraz $(A \times B) \to C$ mają zawsze tyle samo elementów (tzn. istnieje *bijekcja* między nimi). (3 pkt)

Zad 6*. (dla ambitnych i ciekawskich) Zapomnijmy na razie o całej arytmetyce, jaką znamy. Wyobraźmy sobie, że żyjemy w świecie, gdzie w matematyce znane są jedynie funkcje, zbiory i logika.

Zdecydowanie brakuje nam tu liczb. Żeby spełnić ludzkie minimum socjalne, potrzebujemy chociażby tych 'naturalnych', 'ludzkich', takich jak dwa, trzy, sto. Jako herosi naszej wymyślonej krainy postanawiamy coś z tym zrobić i uratować ludzkość od wiecznego nieliczenia.

Od czegoś trzeba zacząć - zatem zacznijmy od niczego. Zdefiniujmy sobie *zero* lub 0 jako nic. Niestety to zbyt mało - na świecie bywają różne obiekty, które bynajmniej nie są 'niczym'. Potrzebujemy jakiegoś narzędzia do ich zliczania. Musimy zatem utworzyć do tego pewien zbiór, który nazwiemy majestatycznie *zbiorem liczb naturalnych* i będziemy oznaczać go $\mathbb{N}$. Określimy teraz 5 *aksjomatów*, czyli powszechnych prawd przyjętych w ramach definicji naszego zbioru:

1. 0 jest liczbą naturalną.

2. Dla każdej liczby naturalnej n istnieje inna liczba naturalna, która jest jej *następnikiem* i oznaczymy ją $s(n)$ (jak widać s jest funkcją $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$).

3. 0 nie jest następnikiem żadnej liczby naturalnej.

4. Jeśli liczby naturalne n i m mają równe następniki, to są sobie równe.

5. **(Aksjomat indukcji)** Jeśli

   - Pewna forma zdaniowa (twierdzenie, prawda) W jest prawdziwa dla 0
   - Z faktu, że W jest prawdziwe dla n wynika, iż jest też prawdziwe dla $s(n)$

   to W jest prawdziwe dla każdej liczby naturalnej.

Super! Mamy liczby! Możemy teraz się nimi bawić: niech $1 = s(0)$, $2 = s(1) = s(s(0))$ itd. Ale wciąż brakuje nam wielu innych ważnych rzeczy. Nie znamy dodawania, mnożenia, odejmowania i masy prawd, które w realnym świecie są oczywiste. Ze zdefiniowaniem dwóch pierwszych chętnie Ci pomogę:

Dodawanie:

$$a + 0 = a$$

$$a + s(b) = s(a + b)$$

Mnożenie:

$$a * 0 = 0$$

$$a * s(b) = a * b + a$$

Ale dalej musisz poradzić sobie sam.

Zadania:

1. Udowodnij, że $a + 1 = s(a)$
2. Udowodnij, że $0 + a = a$ (to nie jest część definicji dodawania!)
3. Udowodnij, że $2 + 2 = 4$. Przyjmijmy $4 = s(s(s(s(0))))$.
4. Udowodnij, że $2 * 2 = 4$
5. Udowodnij, że $a * 1 = a$
6. Określ, kiedy jedna liczba jest mniejsza (bądź mniejsza-równa) od drugiej
7. * Zdefiniuj *moduł (wartość bezwzględną) z różnicy* dwóch liczb (nie mamy liczb ujemnych, stąd moduł a nie zwykłe odejmowanie)
8. * Udowodnij, że dodawanie jest łączne, tj $(a + b) + c = a + (b + c)$
9. * Udowodnij, że dodawanie jest przemienne, tj $a + b = b + a$
10. ** Udowodnij, że $(a + b) * c = a * c + b * c$
11. ** Udowodnij, że mnożenie jest łączne
12. ** Udowodnij, że mnożenie jest przemienne

Jak wyobrażasz sobie definicję liczb całkowitych i wymiernych w naszym systemie? Czy możliwe jest określenie liczb rzeczywistych? Jeśli tak, to w jaki sposób? Jeśli nie, to dlaczego?

To zadanie jest nieobowiązkowe. Zrobienie go w całości (lub prawie całości) sprawi, że nie będziesz się specjalnie musiał martwić o pozostałe zadania. Mimo to proszę, byś przynajmniej spróbował zrobić z każdego z pozostałych zadań chociaż po jednym przykładzie.