Przygotowane zadania (i poprzedzający je wstęp) okazały się być trudne, więc zostały przed publikacją okrojone i pozostało z nich głównie obliczanie pochodnych. Wyniki różniczkowania wykorzystamy na warsztatach, tam więc omówimy usuniętą ciekawostkę dotyczącą całki eliptycznej i bardziej przydatne rzeczy w kilku smakach.

Rozwiązania proszę przesyłać na adres `m.zielinski2+WWW` w domenie `student.uw.edu.pl`.

W poniższym tekście stosowana jest tzw. *konwencja sumacyjna Einsteina.*

1 Przykrótki wstęp: dwie transformacje

Będziemy na warsztatach często korzystać z tego, że mnóstwo geometrycznych obiektów między układami współrzędnych transformuje się ze swoimi składowymi podobnie do operatorów różniczkowych.

Różniczką (zupełną) lub pochodną zewnętrzną (*exterior derivative*) funkcji $F(x^1, x^2, \dots, x^n)$ nazwiemy wyrażenie

$$\mathrm{d}F = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F(x^1, x^2, \dots, x^n)}{\partial x^i} \mathrm{d}x^i \equiv \frac{\partial F}{\partial x^i} \mathrm{d}x^i.$$

W szczególności, F może być funkcją przypisującą współrzędnym $(x^1, x^2, \dots, x^n)$ jakiegoś punktu jedną z jego współrzędnych w innym lub tym samym układzie, np. dla $F(x^1, x^2, \dots, x^n) = x^2$ mamy $\mathrm{d}F = \mathrm{d}x^2$,[1] a przez transformacje współrzędnych określone funkcjami $y^a = y^a(x^1, x^2, \dots, x^n)$ otrzymujemy wyrażenia łańcuchowe:

$$\mathrm{d}F = \frac{\partial F}{\partial y^i} \mathrm{d}y^i(x^1, x^2, \dots, x^n) = \frac{\partial F}{\partial y^i} \frac{\partial y^i}{\partial x^a} \mathrm{d}x^a \equiv \sum_{a=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial y^i} \frac{\partial y^i}{\partial x^a} \mathrm{d}x^a.$$

Zazwyczaj w transformacjach współrzędnych między układami, np. $\left(x^i\right)_{i=1}^{n}$, $\left(y^i\right)_{i=1}^{n}$, $\left(z^i\right)_{i=1}^{n}$, pisze się skrótowo i z pochodnymi cząstkowymi we wszystkie strony:

$$\mathrm{d}x^i = \frac{\partial x^i}{\partial y^j} \mathrm{d}y^j = \frac{\partial x^i}{\partial z^j} \mathrm{d}z^j = \frac{\partial x^i}{\partial y^j} \frac{\partial y^j}{\partial z^k} \mathrm{d}z^k = \frac{\partial x^i}{\partial z^j} \frac{\partial z^j}{\partial y^k} \mathrm{d}y^k = \frac{\partial x^i}{\partial y^j} \frac{\partial y^j}{\partial x^k} \mathrm{d}x^k,$$

gdzie w szczególności (skrajne wyrażenia) widać, że

$$\frac{\partial x^i}{\partial y^j} \frac{\partial y^j}{\partial x^k} \equiv \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial x^i}{\partial y^j} \frac{\partial y^j}{\partial x^k} = \delta^i_k,$$

gdzie użyta została *delta Kroneckera.*

Z reguły łańcuchowej[2] otrzymujemy podobne przekształcenia operatorów pochodnych cząstkowych po współrzędnych, $\frac{\partial}{\partial(\cdot)}$,[3] związanych transformacjami współrzędnych $y^a = y^a(x^1, x^2, \dots, x^n)$:

$$\frac{\partial}{\partial x^i} = \frac{\partial y^a}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial y^a} \equiv \sum_{a=1}^{n} \frac{\partial y^a}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial y^a}.$$

2 Zadania

2.1 P1: Pochodne, pochodne, pochodne

2.1.1 P1.1: Klimat polarny

Wprowadźmy współrzędne biegunowe, tj. (r, ϕ) takie, że wiążą się z innymi (x, y) zależnościami:

$$x = r \cos\phi, \quad y = r \sin\phi.$$

[1] Z kontekstu wynika, że mieliśmy tu przez $\mathrm{d}x^2$ na myśli różniczkę (funkcji) współrzędnej x^2, a nie funkcji kwadratowej, $\mathrm{d}\left(x^2\right) = 2x\mathrm{d}x$, zmiennej x, ani *element liniowy* $(dx)^2$.

[2] wzory na pochodne złożeń funkcji

[3] Dany operator, np. $\frac{\partial}{\partial x^i}(\cdot)$, w miejsce kropki przyjmuje funkcje. Tutaj jednak dokonujemy zmiany zmiennej po której obliczamy pochodną. We wszystkich równościach wyrazy $\frac{\partial}{\partial x^i}$ można podmienić na $\frac{\partial F}{\partial x^i}$ i żądać, żeby otrzymane równanie było spełnione dla dowolnej funkcji F.

Proszę przedstawić różniczki $\mathrm{d}x$ i $\mathrm{d}y$ w bazie $(\mathrm{d}r, \mathrm{d}\phi)$, tj. jako sumy różniczek $\mathrm{d}r$ i $\mathrm{d}\phi$ przemnożonych przez pewne współczynniki liczbowe (skalarne funkcje współrzędnych). W miarę możliwości proszę zapisać te współczynniki w postaci funkcji współrzędnych (r, ϕ) (zamiast (x, y)).

Proszę przedstawić pochodne $\frac{\partial}{\partial r}$ i $\frac{\partial}{\partial \phi}$ w bazie $(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y})$, tj. jako sumy tych operatorów z pewnymi współczynnikami zależnymi od współrzędnych. W miarę możliwości proszę te współczynniki wyrazić przez współrzędne (x, y).

2.1.2 P1.2: Pierwsza anomalia

Niech będą dane liczby rzeczywiste ϕ_0, e, przy czym $e \in [0; 1[$.[4] Wprowadźmy współrzędne (p, ν) przez następujące związki ze współrzędnymi biegunowymi:

$$r = \frac{p}{1 + e\cos\nu}, \quad \nu = \phi - \phi_0.$$

Proszę przedstawić różniczki $\mathrm{d}r$ i $\mathrm{d}\phi$ w bazie $(\mathrm{d}p, \mathrm{d}\nu)$, a pochodne $\frac{\partial}{\partial p}, \frac{\partial}{\partial \nu}$ w bazie $(\frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial \phi})$.

2.1.3 P1.3: Druga anomalia

Wprowadźmy w miejsce ν współrzędną E, która będzie zdefiniowana przez fakt, że rośnie wraz z ν, oraz związek

$$\cos\nu = \frac{\cos E - e}{1 - e\cos E}.$$

Proszę przedstawić różniczki $\mathrm{d}r$ i $\mathrm{d}\phi$ w bazie $(\mathrm{d}p, \mathrm{d}E)$, a pochodne $\frac{\partial}{\partial p}, \frac{\partial}{\partial E}$ w bazie $(\frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial \phi})$.

Proszę przy tym *nie gubić znaków* i podać związki prawdziwe w całych dziedzinach ν i E, tj. $[0, 2\pi[$.

2.1.4 P1.4: Parabole

Wprowadźmy współrzędne (α, β) takie, że wiążą się z innymi (x, y) zależnościami:

$$y = \alpha + \beta^2, \quad x = \beta.$$

Proszę przedstawić różniczki $\mathrm{d}x$ i $\mathrm{d}y$ w bazie $(\mathrm{d}\alpha, \mathrm{d}\beta)$, a pochodne $\frac{\partial}{\partial \alpha}, \frac{\partial}{\partial \beta}$ w bazie $(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y})$. Proszę następnie odwrócić transformację współrzędnych i wykonać obliczenia *w drugą stronę*.

2.2 P2: *Infinitezymalna zmiana*, mówili. . .

Składowe których poniższych obiektów transformują się jak pochodne ∂, a które jak różniczki d (tj. w miejsce których z tych wyrażeń (np. zamiast $\frac{\partial}{\partial \phi}$, $\mathrm{d}\phi$) można wstawić rzeczy proporcjonalne do odpowiednich wersorów (np. $\hat{e}_\phi$), żeby otrzymać równania na przekształcenia danych wektorów między układami współrzędnych[5])?

- (Wektory) prędkości cząstek,
- wektory styczne do krzywych,
- pędy cząstek.

W rozważaniach i uzasadnieniach proszę wykorzystać (m.in.) zależności uzyskane w P1.1 oraz P1.4.

2.3 P3: Proszę, daj mi znak

Rozważmy następujące funkcje argumentów rzeczywistych:

$$P(x, y, z) = 2x^2 - xy - y^2 + 2xz + yz, \qquad Q(x, y, z) = xy - yz + zx$$

oraz problem określenia możliwych znaków wartości danej funkcji f *kwadratowej wielu argumentów*: Czy istnieją argumenty rzeczywiste (x, y, z) takie, że $f(x, y, z) > 0$? A takie, że $f(x, y, z) < 0$? A taka trójka $(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$, że $f(x, y, z) = 0$?

Proszę rozwiązać wprowadzony problem dla funkcji P, Q. Jak uzyskać odpowiedzi na te pytania najszybciej, uniwersalną (dla *kwadratowych* wyrażeń) metodą?

[4] Inaczej pisząc, $0 \leqslant e < 1$.

[5] na ile to wyrażenie ma sens

2.4 P4: Czy to już zastosowanie?

Niech będą dane liczby rzeczywiste c, β, γ, przy czym $c > 0$ oraz $\gamma^{-2} = 1 - \beta^2$. Wprowadźmy współrzędne $(\tilde{t}, \tilde{x}, \tilde{y})$ związane z innymi (t, x, y) następującymi związkami:

$$t = \gamma(\tilde{t} - \frac{\beta}{c}\tilde{x}), \quad x = \gamma(\tilde{x} - \beta c\tilde{t}), \quad y = \tilde{y}.$$

2.4.1 P4.1: Znowu pochodne

Proszę podać w sposób jawny transformację odwrotną do zadanej. Proszę, podobnie jak w zadaniach P1, przekształcić współrzędnościowe różniczki i pochodne cząstkowe *w obie strony.*

2.4.2 P4.2: Pif-Pfaff

Rozważmy równości wyrażeń:[6]

$$E\mathrm{d}t + p\mathrm{d}x + q\mathrm{d}y = \tilde{E}\mathrm{d}\tilde{t} + \tilde{p}\mathrm{d}\tilde{x} + \tilde{q}\mathrm{d}\tilde{y}, \qquad u\frac{\partial}{\partial t} + v\frac{\partial}{\partial x} + w\frac{\partial}{\partial y} = \tilde{u}\frac{\partial}{\partial \tilde{t}} + \tilde{v}\frac{\partial}{\partial \tilde{x}} + \tilde{w}\frac{\partial}{\partial \tilde{y}}.$$

Proszę wyrazić przez (zadane liczby) E, p, q, u, v, w ich odpowiedniki okraszone tyldami. Proszę też zapisać odpowiednie wyrażenia (te, które się upraszczają) dla następujących szczególnych przypadków:

- $p = 0 = q$, $E = mc^2$,
- $p = \frac{E}{c}$, $q = 0$,
- $v = 0 = w$.

2.4.3 P4.3: Zachować (spokój)

Proszę wyrazić $E^2c^{-2} - p^2 - q^2$ za pomocą zmiennych z tyldami oraz parametrów c, β, γ. Proszę też znaleźć analogiczną (do uzyskanej) równość ze zmiennymi u, v, w i ich odpowiednikami z tyldami.

[6] W pierwszej równości obie strony nie muszą wyrażać różniczki jakiejś funkcji i mogą być *dowolną* kombinacją różniczek współrzędnościowych. Jedną z funkcjonujących nazw na takie obiekty jest *wyrażenie Pfaffa.*