# Algebra Liniowa Płaszczyzny – WWW14
# Zadania kwalifikacyjne

Michał Tarnowski

Maj 2018

## Wstęp

Rozwiązania należy wysłać do końca maja, na adres m.tarnowski95@gmail.com. Mi pasują też późniejsze terminy, ale organizatorzy wyznaczyli datę z góry. Można wysyłać je na raty, porcjami – dla oszczędności czasu.

Przy rozwiązywaniu jak najbardziej można posiłkować się zewnętrznymi źródłami – jak Internet, książki, a w pewnym zakresie nawet inny człowiek. Kandydaci po prostu mają przed warsztatami umieć rozwiązać te zadania (przynajmniej część). Nie ma znaczenia, czy potrafią to zrobić od ręki i „z głowy" (bo np. znali te tematy wcześniej), czy muszą się tego dopiero douczyć – końcowy efekt jest taki sam. Chcę tylko uniknąć sytuacji, gdzie ktoś robi zadania za kandydata albo dyktuje mu odpowiedzi.

Kolejność zadań nie odpowiada poziomowi trudności. Kolejność nie odpowiada też ściśle zależności logicznej – sporo zadań z D można rozwiązać bez patrzenia na którąkolwiek poprzednią część. Zadań jest sporo (trochę więcej niż na inne warsztaty). Na szczęście każde rozwiązanie jest dość krótkie, tzn. zajmuje linijkę lub kilka.

Więcej informacji podano w uwagach końcowych.

## Część A – układy równań liniowych z dwiema niewiadomymi

1. Czy istnieją układy równań liniowych z dwiema niewiadomymi, które mają:

   (a) nieskończenie wiele rozwiązań i każda (dowolna) para liczb jest rozwiązaniem,

   (b) nieskończenie wiele rozwiązań, ale nie każda para liczb jest rozwiązaniem,

   (c) dokładnie dwa rozwiązania,

   (d) dokładnie jedno rozwiązanie,

(e) zero rozwiązań?

Odpowiedź uzasadnij – przykładem, jeśli jest twierdząca, lub dowodem, jeśli jest przecząca. Możesz podawać układy dowolnej liczby równań (co najmniej dwóch) – ale z dokładnie dwiema niewiadomymi. Uwaga: tautologie (tożsamości) też są brane za równania z dwiema niewiadomymi.

## Część B – działania na wektorach płaskich

Istnieją dwie definicje wektora na płaszczyźnie – geometryczna i analityczna (algebraiczna).

- Definicja geometryczna to „strzałeczka", czyli uporządkowana para punktów na płaszczyźnie, tzw. wektor zaczepiony. Dalej zakłada się, że ta strzałka jest zawsze zaczepiona w umownym punkcie $O$ – początku układu współrzędnch.

  Taka strzałka ma swoją wielkość (moduł, długość), kierunek oraz zwrot.

- Definicja analityczna (algebraiczna) to uporządkowana para liczb, zwanych składowymi wektora: $\vec{u} := (u_1, u_2)$.

1. Uzasadnij, dlaczego te definicje można traktować jako równoważne.
2. Podaj dwie definicje dodawania wektorów płaskich – geometryczną i analityczną (algebraiczną). Czemu są równoważne (izomorficzne)?
3. Sprawdź własności dodawania wektorów – korzystając z tej definicji, którą uważasz za wygodniejszą (np. podstawiając do niej):
   (a) łączność, tzn. $\forall \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} : (\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$ (dzięki czemu nie trzeba nawiasować),
   (b) istnienie wektora zerowego (elementu neutralnego): $\vec{0}+\vec{u} = \vec{u}+\vec{0} = \vec{u}$, tzn. wskaż go,
   (c) istnienie wektora przeciwnego, tzn. $\vec{u} + \vec{u'} = \vec{u'} + \vec{u} = \vec{0}$. Wektor przeciwny oznacza się przez $-\vec{u}$.
   (d) przemienność dodawania wektorów: $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$.

   (e) Udowodnij, że istnieje dokładnie jeden wektor zerowy (podpowiedź: wystarczy udowodnić, że dowolne dwa wektory zerowe są sobie równe).
   (f) Udowodnij, że dla każdego wektora istnieje dokładnie jeden wektor przeciwny (podpowiedź analogiczna jak podpunkt wyżej).
4. (a) Podaj wzór na iloczyn wektora przez liczbę rzeczywistą, $a\vec{u}$.
   (b) Sprawdź własności tego działania:
      i. rozdzielność względem dodawania skalarów: $(a + b)\vec{u} = a\vec{u} + b\vec{u}$,

ii. rozdzielne względem dodawania wektorów: $a(\vec{u}+\vec{v}) = a\vec{u} + a\vec{v}$,
iii. „łączność”, tzn. $a(b\vec{u}) = (ab)\vec{u}$,
iv. to, że ma jedynkę (element neutralny): $1\vec{u} = \vec{u}$.

(c) Korzystając tylko z pokazanych własności (bez jawnego wzoru), pokaż że:

i. $0\vec{u} = \vec{0}$,
ii. $(-1)\vec{u} = -\vec{u}$.

(d) Korzystając tylko z pokazanych własności mnożenia (podpunkty (b)–(c) w tym zadaniu), pokaż że dodawanie wektorów musi być przemienne.

## Część C – liniowość funkcji rzeczywistych

Jak sugeruje tytuł sekcji – zadania dotyczą tylko funkcji $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

1. (a) Podaj definicje[1] funkcji addytywnej i jednorodnej.
   (b) Podaj przykład funkcji addytywnej i przykład funkcji jednorodnej.
   (c) Podaj przykład funkcji, która nie jest ani addytywna, ani jednorodna.

2. (a) Czy funkcje addytywne mogą zachowywać zero, tzn. czy zero może być ich punktem stałym? Symbolicznie: czy może zajść równość $f(0) = 0$?
   (b) Jeśli funkcje addytywne mogą zachowywać zero, to czy muszą? Tzn. czy powyższa równość jest zawsze prawdziwa?
   (c) Analogicznie: czy funkcja jednorodna może zachowywać zero?
   (d) Jeśli tak, to czy musi?
   (e) Podaj przykład funkcji zachowującej zero, która nie jest ani addytywna, ani jednorodna.

3. (a) Czy funkcja jednorodna musi być addytywna?
   (b) Czy implikacja zachodzi w drugą stronę, tzn. czy funkcja addytywna musi być jednorodna? Można posiłkować się literaturą.
   (c) Zadanie z gwiazdką (świąteczne): czy funkcja jednorodna w ogólności musi być addytywna? Można rozważać inne dziedziny funkcji niż prosta rzeczywista.

4. Pokaż, że jeśli funkcja jest jednocześnie addytywna i jednorodna, to zachowuje równania liniowe. To znaczy sprawdź, że po zadziałaniu taką funkcją stronami na równanie $Ax + By = C$ otrzymuje się równanie, które też jest liniowe, ze względu na nowe zmienne.

[1] Chodzi definicje używane w algebrze liniowej, a nie o te z teorii liczb, analizy czy algebry wielomianów.

## Część D – składanie funkcji rzeczywistych

Ta część ma przygotować do działań na odwzorowaniach liniowych i ich macierzach. Jest wiele analogii między nimi a znajomymi ze szkoły funkcjami zmiennej rzeczywistej.

1. Dla funkcji rzeczywistych $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ podaj definicję ich złożenia $f \circ g$.
2. Czy składanie funkcji jest łączne? Uzasadnij.
3. Czy składanie funkcji może być przemienne? Czy zawsze takie jest? Uzasadnij.

Jeśli dla dwóch funkcji składanie jest przemienne, tzn. jeśli $f \circ g = g \circ f$, to mówi się, że te funkcje komutują. Jest to relacja zwrotna, tzn. każda funkcja komutuje ze sobą. Ta relacja między funkcjami jest też symetryczna, tzn. nie wyróżnia żadnej kolejności: $f$ komutuje z $g$ wtedy i tylko wtedy (wtw.), gdy $g$ komutuje z $f$.

4. Czy istnieją trzy funkcje, które parami komutują? Odpowiedź uzasadnij: przykładem, jeśli jest twierdząca, albo dowodem, jeśli jest przecząca. Jeśli potwierdzasz, to podaj więcej niż jeden przykład.

   W takiej sytuacji mówi się, że relacja jest przechodnia dla tego konkretnego zbioru. Tzn. jeśli $f$ jest w tej relacji z $g$ i $g$ z $h$, to $f$ jest w tej relacji z $h$.

5. Czy relacja komutacji (przemienności) w ogólności jest przechodnia? Innymi słowy: jeśli $f$ komutuje z $g$, a $g$ komutuje z $h$, to czy $f$ musi komutować z $h$? Odpowiedź uzasadnij: dowodem, jeśli jest twierdząca, albo kontrprzykładem, jeśli jest przecząca.
6. (a) Pokaż, że złożenie funkcji addytywnych jest addytywne.
   (b) Pokaż, że złożenie funkcji jednorodnych jest jednorodne.
   (c) Pokaż, że złożenie funkcji zachowujących zero również zachowuje zero.

## Uwagi końcowe

Rozwiązania mogą być w dowolnym czytelnym formacie. Może być LaTeX [latech], np. ShareLaTeX – kompilator online, którym zrobiono ten dokument. Może być TeXLive – kompilator offline. Może być Word (MS Office), Writer (Open Office / Libre Office), a nawet pismo ręczne – czy to na papierze, czy to w programie graficznym jak MS Paint. Możliwe są też hybrydy, np. tekst w Wordzie ze wzorami wstawionymi jako grafiki – zrobione w LaTeX-u lub pisane ręcznie. Jeszcze raz podkreślę: najważniejsza jest czytelność, a nie platforma.

Nie trzeba się przejmować niskim wynikiem – próg przyjęcia też powinien być niski.