WWW14: Kosmologia

Maciej Ossowski

31 maja 2018

Rozwiązania oraz wszelkiego rodzaju pytania dotyczące zadań proszę przesyłać na adres:

maciej.michal.ossowski@gmail.com

Termin oddawania zadań: 31.05.
Poniższe notatki i zadania mają na celu pokazanie pewnych intuicji w sposób możliwie mało zmatematyzowany. Jeśli odpowiada Ci ściślejsze podejście, daj znać, zawszę mogę dopisać kilka definicji.

1 Szczególna teoria względności

Krótki kurs Szczególnej Teorii Względności wykracza poza ambicję tych notatek. Jeśli masz w tym zakresie jakieś braki polecam skrypt "Niezwykle szczególna teoria względności" dr. hab. Andrzeja Dragana, dostępny swobodnie w Internetach. Szczególnie (heh) polecam zaznajomić się z pojęciem 4-wektorów (4-prędkość i 4-pęd) oraz rozdziały o układach nieinercjalnych i zakrzywionej czasoprzestrzeni. Zarówno w tych notatkach jak i w NSTW używana jest konwencja sumacyjna Einsteina oznaczająca, że jeśli dany indeks pojawia się 2-krotnie; raz u dołu i raz u góry to należy po nim wysumować:

$$A^i B_i := \sum_i A^i B_i \tag{1}$$

Dodatkowo indeksami łacińskimi będziemy oznaczać współrzędne przestrzenne $i = 1, 2, 3$ lub w układzie kartezjańskim $i = x, y, z$. Litery greckie będą się odnosić do współrzędnych czasoprzestrzennych $\mu = 0, 1, 2, 3$ lub $\mu = t, x, y, z$.

1.1 ZADANIA:

1. Pokaż, że prędkość światła jest równa c w każdym inercjalnym układzie współrzędnych.

2. Wyobraź sobie ciąg obserwatorów (na przykład rakiet) poruszających się po prostej w taki sposób, że każdy obserwator porusza się z prędkością u względem poprzedniego. Pierwsza rakieta obserwuje cząstkę poruszającą

się z prędkością v_0. Z jaką prędkością porusza się cząstka według drugiej rakiety? Z jaką według trzeciej? Z jaką według rakiety której numer w szeregu dąży do nieskończoności? Wskazówka: rozważ transformację prędkości jako rekurencje i spróbuje znaleźć jej granicę.

3. Jaki jest związek energii i pędu dla cząstek bezmasowych?

4. Pokaż, że w granicy małych prędkości energia $E = \gamma mc^2$ odtwarza klasyczną energię kinetyczną.

5. Pokaż, że jeśli prędkość cząstki jest bliska prędkości światła $v \approx c$ (czyli $\gamma \gg 1$) dostajemy $mc^2 \ll pc$. Pokaż, że w przybliżeniu odtwarza to wynik z zadania 3.

2 Wstęp matematyczny czyli o metryce

Metryk, jak sam nazwa sugeruje służy do mierzenia. Ale czego? Zacznijmy od prostego przykładu, czyli płaskiej trójwymiarowej metryki we współrzędnych kartezjańskich:

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z^2 \tag{2}$$

Powyższe jest przepisem jak policzyć długość, a dokładniej kwadrat długości, infinitezymalngo (czytaj: bardzo krótkiego) odcinka, jeśli długość jego rzutu na osie x, y, z to odpowiednio $\mathrm{d}x, \mathrm{d}y, \mathrm{d}z$. Tutaj standardowa notacja bywa myląca: $\mathrm{d}x^2$ oznacza kwadrat różniczki $\mathrm{d}x$, ale równie często można spotkać się z napisem $\mathrm{d}x^i$ oznaczającym różniczkę i-tej współrzędnej. W razie wątpliwości stosowane będą nawiasy.

2.1 Ta sama metryka we współrzędnych cylindrycznych

Zobaczmy teraz jak wygląda powyższa metryka we współrzędnych cylindrycznych:

$$\begin{cases} x = \rho\cos\phi \\ y = \rho\sin\phi \\ z = z' \end{cases} \tag{3}$$

Potrzebny do tego jest przepis na transformację różniczek $\mathrm{d}x^i$ (i numeruje współrzędne!). Jeśli wiesz w jaki sposób zamienia się zmienne przy całkowaniu, to już prawie wiesz jak to zrobić. Jeśli nie to jest na to prosty mnemotechniczny sposób. Wygląda on tak: różniczkujemy starą zmienną po jednej z nowych zmiennych (traktując pozostałe jak stałe) i dostawiamy odpowiednią różniczkę nowej zmiennej. Następnie sumujemy przyczynki od wszystkich nowych zmiennych:

$$\mathrm{d}x = \frac{\partial x}{\partial y^1}\mathrm{d}y^1 + \frac{\partial x}{\partial y^2}\mathrm{d}y^2 + \cdots + \frac{\partial x}{\partial y^n}\mathrm{d}y^n \tag{4}$$

W ten sposób ∂y^i "skraca się" z $\mathrm{d}y^i$. (Jeśli mnemotechniczne wytłumaczenie jest dla Ciebie niesatysfakcjonujące to powiem tylko że studenci fizyki używają go przez cały pierwszy rok, zanim dowiedzą się skąd ona wynika matematycznie.) Zobaczmy jak to wygląda w praktyce:

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}x &= \cos\phi \mathrm{d}\rho - \rho \sin\phi \mathrm{d}\phi \\
\mathrm{d}y &= \sin\phi \mathrm{d}\rho + \rho \cos\phi \mathrm{d}\phi \\
\mathrm{d}z &= \mathrm{d}z'
\end{aligned} \tag{5}$$

Ponieważ transformacja współrzędnej z jest identycznością, możemy zapomnieć o z' i dalej pisać wszędzie z. Policzmy kwadraty wyrażeń $(dx^i)^2$:

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}x^2 &= \cos^2\phi \mathrm{d}\rho^2 - 2\rho\cos\phi\sin\phi \mathrm{d}\rho\mathrm{d}\phi + \rho^2\sin^2\phi\mathrm{d}\phi^2 \\
\mathrm{d}y^2 &= \sin^2\phi \mathrm{d}\rho^2 + 2\rho\cos\phi\sin\phi \mathrm{d}\rho\mathrm{d}\phi + \rho^2\cos^2\phi\mathrm{d}\phi^2
\end{aligned} \tag{6}$$

Teraz dodając dostajemy początkową metrykę zapisaną we współrzędnych cylindrycznych:

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}\rho^2 + \rho^2\mathrm{d}\phi^2 + \mathrm{d}z^2 \tag{7}$$

2.2 Ciągle ta sama metryka tylko tym razem ograniczona do płaszczyzny

Przeanalizujmy teraz inny rodzaj transformacji metryki, czyli obcięcie jej do jakiejś powierzchni. W tym przypadku niech to będzie płaszczyzna zadana równaniem:

$$x + y + z = 0 \tag{8}$$

Punktem wyjścia będzie znowu metryka (2), powinna ona w jakiś sposób uwzględniać ten warunek płaszczyzny. Jej wymiar powinien spaść z 3 do 2, skoro jedną ze współrzędnych jest ustalona przez równanie (8), jeśli tylko mamy podane 2 pozostałe. Różniczkując równanie płaszczyzny dostajemy:

$$\mathrm{d}x + \mathrm{d}y + \mathrm{d}z = 0 \tag{9}$$

Teraz można uzależnić jedną z różniczek od pozostałych i policzyć jej kwadrat:

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}z &= -\mathrm{d}x - \mathrm{d}y \\
\mathrm{d}z^2 &= \mathrm{d}x^2 + 2\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \mathrm{d}y^2
\end{aligned} \tag{10}$$

Teraz wstawiając ten warunek do (2) mamy:

$$ds^2 = 2(\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}x\mathrm{d}y + \mathrm{d}y^2) \tag{11}$$

Jak widać pojawił się wyraz nowego rodzaju, zawierający obie różniczki $\mathrm{d}x$ i $\mathrm{d}y$. Jeśli chcielibyśmy zapisać tą metrykę w postaci macierzowej pojawiłyby się wyrazy pozadiagonalne:

$$g_{ij} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

W powyższym zapisie g_{ij} jest macierzą (a raczej tensorem) kodującym informacja o współczynnikach przy odpowiednich różniczkach:

$$\mathrm{d}s^2 = g_{ij}\mathrm{d}x^i\mathrm{d}x^j \tag{12}$$

W tym przypadku obecność wyrazów pozadiagonalnych oznacza, że baza w której zapisana jest metryka nie jest "przystosowana" do płaszczyzny, ściślej: nie jest ona ortonormalna na płaszczyźnie.

2.3 No dobrze, ale jak coś policzyć

Zobaczmy teraz jak zmierzyć odcinki dłuższe od infinitezymalnie krótkich. Wszystkie inifitezymalne przyczynki do długości trzeba oczywiście dodać, czyli scałkować. Policzmy długość helisy czyli w spirali której odległość między kolejnymi nawinięciami jest stała. Można sobie ją wyobrazić jako tor ruchu punktu poruszającego się ze stałą prędkością kątową po walcu i jednocześnie ze stałą prędkością wzdłuż walca. Jeśli promień walca to R a odległość między kolejnymi nawinięciami to b możemy sparametryzować helisą następująco:

$$\begin{cases} x(t) = R\cos t \\ y(t) = R\sin t \\ z(t) = b \cdot t \end{cases} \tag{13}$$

lub prościej we współrzędnych cylindrycznych:

$$\begin{cases} \rho(t) = R \\ \phi(t) = t \\ z(t) = b \cdot t \end{cases} \tag{14}$$

Jak widać jest to parametryzacja kątem ϕ. Długość tak przygotowanej krzywej możemy znaleźć używając metryki we współrzędnych walcowych. Korzystając z poznanej już techniki transformacji różniczek dostajemy:

- $\mathrm{d}\rho = 0$ - ponieważ współrzędna ρ jest stała na krzywej.
- $\mathrm{d}\phi = \mathrm{d}t$
- $\mathrm{d}z = b\mathrm{d}t$

i sumarycznie:

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}t^2(R^2 + b^2) \tag{15}$$

Teraz aby policzyć długość jednego nawinięcia helisy wystarczy teraz tylko scałkować pierwiastek z (15):

$$s = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}t\sqrt{R^2 + b^2} = 2\pi\sqrt{R^2 + b^2} \tag{16}$$

2.4 ZADANIE: Metryka indukowana na sferze

Korzystając ze współrzędnych biegunowych:

$$\begin{cases} x = r\cos\phi \\ y = r\sin\phi \end{cases} \tag{17}$$

znajdź postać metryki (2) obciętą do sfery zadanej równaniem $x^2+y^2+z^2 = R^2$, gdzie R jest stałą. Jak to zrobisz odczuj satysfakcję, stad już bardzo blisko do pełnej metryki FLRW! Wskazówka: najpierw skorzystaj z równania sfery, a potem wprowadź nowe współrzędne.
Jak wygląda powyższa metryka zapisana we współrzędnych sferycznych:

$$\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\phi \\ y = r\sin\theta\sin\phi \\ z = r\cos\theta \end{cases} \tag{18}$$

3 Hydrodynamika

Znasz na pewno takie wielkości jak gęstość i ciśnienie. Jak używamy ich relatywistycznej teorii jaką jest kosmologia? Potrzebny jest nam do tego jakiś obiekt kompatybilny z 4-wymiarową czasoprzestrzenią. Jest nim tensor energii-pędu $T^{\mu\nu}$ (operacyjną definicją tensora może być "coś co się dobrze transformuje"). Ma on dwa wskaźniki, więc możemy go zapisać w postaci macierzy. Ważna dla nas jest interpretacja diagonalnych wyrazów: T^{00} jest gęstością energii (ilość energii na jednostkę objętości), dla nas gęstość energii i gęstość materii będą oznaczać w zasadzie to samo - patrz słynne $E = mc^2$. T_{ij} jest strumieniem i-tej składowej pędu w kierunku j. Czyli T_{ii} mówi nam o zmianie i-tej składowej pędu w tym samym kierunku ... zupełnie jak ciśnienie! Dalej przyjmuję bardzo popularną konwencję w relatywistce w której prędkość światła $c = 1$. W konsekwencji długość i czas mają tą samą jednostkę, podobnie energia i masa.

3.1 Równanie stanu dla nierelatywistycznego pyłu

Można pokazać, że dla ośrodka złożonego z punktowych cząstek tensor energii pędu ma postać:

$$T^{\mu\nu}_{\text{particles}}(\bar{x}) = \sum_n \frac{p_n^\mu p_n^\nu}{E_n}\delta^3(\bar{x} - \bar{x}_n) \tag{19}$$

gdzie suma po n numeruje cząstki, a p_n^μ i E_n to odpowiednio składowa μ 4-pędu i energią cząstki. δ^3 to tak zwana Delta Diraca, której matematyczną naturą nie musimy się chwilowo przejmować. Ważne jest to, że ogranicza tensor energii-pędu do położeń $\bar{x}_n$ w których znajduje się jakaś cząstka - w pozostałych $T^{\mu\nu}_{\text{particles}}(\bar{x}) = 0$.

Porównajmy to tensorem energii-pędu dla idealnego płynu (przyjmujemy że wszechświat wypełnia właśnie taki płyn):

$$T^{\mu\nu} = (\rho + p)u^{\mu}u^{\nu} - pg^{\mu\nu} \tag{20}$$

gdzie u^{μ} to 4-prędkość. Pamiętając, że w układzie spoczynkowym $u^{\mu} = (1, 0, 0, 0)$, a metryka staje się metryką Minkowskiego $\eta^{\mu\nu}$, dostajemy (przelicz i przekonaj się osobiście):

$$T^{\mu\nu} = \begin{bmatrix} \rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p \end{bmatrix}$$

Z tego dlaczego liczymy to w układzie spoczynkowym wytłumaczę się podczas zajęć. Aby porównać te dwa tensory zauważmy jeszcze, że wkład do ciśnienia daje pęd we wszystkich kierunkach, stąd $p = \frac{1}{3}\sum_{i=1}^{3} T^{ii}_{\text{particles}}$. Dla gęstości mamy już prościej $\rho = T^{00}_{\text{particles}}$. Przypomnijmy sobie jeszcze związek energii z pędem: $m_n^2 = E_n^2 - \bar{p}_n^2$ Stąd:

$$p = \frac{1}{3}\sum_n \frac{p_n^2}{E_n} = \frac{1}{3}\sum_n \frac{p_n^2}{m\sqrt{1 + p_n^2/m^2}} \approx \frac{1}{3}\sum_n \frac{p_n^2}{m}(1 - p_n^2/m) \approx \frac{1}{3}\sum_n \frac{p_n^2}{m} + O(p_n^4) \tag{21}$$

$$\rho = \sum_n E_n = \sum_n m\sqrt{1 + p_n^2/m^2} \approx \sum_n (m + \frac{p_n^2}{2m}) = n \cdot m + \sum_n \frac{p_n^2}{2m} \tag{22}$$

W powyższym korzystamy z rozwinięcia Taylora $(1+x)^a = 1+ax$. Jest ono uzasadnione ponieważ cząstki są nierelatywistyczne, czyli ich pęd jest dużo mniejszy od masy - $\frac{p_n^2}{m^2} \ll 1$. Porównując p i ρ dostajemy $\rho = m \cdot n + \frac{3}{2}p$. Zróbmy teraz jeszcze jedno (już ostanie!) przybliżenie: niech cząstki słabo ze sobą oddziałują (co jest rozsądne dla elektrycznie obojętnych cząstek, zderzających się z małymi prędkościami), czyli $m \cdot n \gg p$. Dostajemy wtedy tak zwane przybliżenie pyłu $\rho = m \cdot n$.

3.2 ZADANIE: Równanie stanu dla promieniowania

Powtórz powyższy rachunek dla cząstek poruszających się z prędkością światła. Przykładem takich cząstek są fotony, ale tak samo traktować będziemy również (w dobrym przybliżeniu) cząstki ultrarelatywistyczne.

4 Poznajmy się

Napisz coś o sobie, jakie masz oczekiwania wobec warsztatu i jaki miałeś kontakt z STW (a może nawet OTW?).

gl hf
Maciej