Zadania kwalifikacyjne na warsztaty "Zjawiska krytyczne"

Maciej Kolanowski

21 maja 2018

Lista zadań już jest zamknięta. Rozwiązania proszę wysyłać na maila (do znalezienia na moim WWW profilu) lub telepatycznie. W przypadku wszelkich wątpliwości proszę także o kontakt.

1 Pogadanka

Opisz w kilku zdaniach czego oczekujesz od tych warsztatów, czego się spodziewasz nauczyć i dlaczego chcesz w nich uczestniczyć. Odpowiedz też na zasadnicze pytanie: jaki jest Twój stosunek do twórczości Piotra Rubika?

2 Matematyka

2.1 Całki gaußowskie

Kluczowe pojęcia: całkowanie przez podstawienie
W ramach tego zadania nauczymy się obliczania całek postaci $\int_{\mathbb{R}} dxe^{-ax^2}$

2.1.1 Zmiana zmiennych

Załóżmy, że mamy dwuwymiarową całkę takiej postaci:

$$\int_{\Omega} dxdyf(x,y),$$

gdzie $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ jest pewnym obszarem (to oznacza tyle, że są jakieś granice całkowania dla x oraz y), a $f : \Omega \to \mathbb{R}$ funkcją, dla której ta całka ma sens. Chcemy wykonać ją (całkę) jednak nie w zmiennych kartezjańskich, a biegunowych (bo np. Ω jest kołem, i wtedy to jest naturalny wybór). W tym celu, za $f(x,y)$ wstawiamy $f(r\cos\phi, r\sin\phi)$, ale to jeszcze nie koniec. Musimy też zamienić $dxdy$ na coś biegunowego. To wyrażenie to pole małego prostokąta o bokach dx i dy. Należy je zatem zastąpić przez pole prostokąta powstałego przez ruszenie się z r do $r + dr$, a z ϕ do $\phi + d\phi$[1]. Jakie będzie pole takiego prostokąta? W ostatnim kroku należy zamienić granice całkowania (czyli zapisać warunek na Ω w zmiennych biegunowych).

[1]Ktoś może powiedzieć, że to wcale nie jest prostokąt... Ale jeżeli dr i $d\phi$ są bardzo małe, to praktycznie jest.

2.2 Praktyka

Wykonaj całkę

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dy e^{-\left(x^2+y^2\right)}$$

przechodząc do zmiennych biegunowych i w nich całkując.

2.3 Właściwa całka gaußowska

Na podstawie wyników z poprzedniego podpunktu znajdź wartość:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-ax^2}$$

Czy potrafisz znaleźć:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx x^2 e^{-ax^2}$$

oraz

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx x^n e^{-ax^2}?$$

(Nie jestem zainteresowany przepisaniem wyniku z wolframa/wiki/tablic, bo ja wiem ile to wynosi, chcę zobaczyć czy potraficie to uzasadnić)

2.4 Pochodna funkcjonalna

Pojęcia kluczowe: całkowanie przez części
Niech F będzie funkcjonałem czyli taką funkcją, która zjada "zwykłą" funkcję i zwraca liczbę. On (ona?) ma jakąś określoną dziedzinę (np. funkcje różniczkowalne, albo całkowalne albo jakaś kombinacja), ale tym się nie przejmujemy – zakładamy, że wszystko co się pojawi należy do jego (jej?) dziedziny.
Pochodną funkcjonalną $\frac{\delta F[\psi]}{\delta \phi(x)}$ (to czytamy: pochodna F w punkcie ψ w kierunku ϕ) definiujemy następująco:

$$\lim_{\epsilon \to 0} \frac{F[\psi + \epsilon\phi] - F[\psi]}{\epsilon} =: \int dx \frac{\delta F[\psi]}{\delta \phi(x)} \phi(x)$$

(x oznacza tutaj zmienną, od której zależy ψ. To nie musi być koniecznie 1-wymiarowa rzecz).

2.4.1 Lagranżjan

Mechanikę klasyczną można sformułować w bardzo elegancki (i, co ważniejsze, użyteczny) sposób przy pomocy pochodnej funkcjonalnej. Niech S, zwane dalej działaniem, jest funkcjonałem (jego dokładną postać podamy poniżej), który "zjada" trajektorię cząstki i wypluwa liczbę. Jeżeli $\frac{\delta S[\psi]}{\delta \phi(x)} = 0$, to ψ nazywamy punktem stacjonarnym i po tej trajektorii porusza się (klasyczna) cząstka. Jedna uwaga: ϕ nie jest absolutnie dowolne, musi znikać na początku i na końcu trajektorii (to znaczy nie zmienia punktu początkowego i końcowego). Niech:

$$S[x] = \int_{t_i}^{t_f} dt \left(\frac{m\dot{x}(t)^2}{2} - U(x(t)) \right),$$

gdzie $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$, $x(t)$ jest trajektorią o ustalonych końcach, to znaczy:

$$x(t_i) = x_i = const.$$

$$x(t_f) = x_f = const.,$$

a $U(x)$ jest energią potencjalną.
Oblicz pochodną funkcjonalną działania w dowolnym kierunku (takim, który nie narusza warunków początkowych) i zażądaj, aby znikała. Jakie równanie otrzymasz? Czy przypomina Ci ono coś?
Rozważmy trochę ogólniejszą postać działania:

$$S[x] = \int_{t_i}^{t_f} dt L(x(t), \dot{x}(t), t)$$

Wyprowadź analogiczne równania jak poprzednio (oczywiście wyrażone przez L). Okazuje się, że jeżeli położymy:

$$L = E_k - E_p,$$

to dostaniemy mechanikę Newtona. Przewaga tego podejścia polega na tym, że x nie musi być zmiennymi kartezjańskimi. Możemy równie dobrze pracować w sferycznych, walcowych czy jakichkolwiek szalonych innych.

2.4.2 Działanie dla struny

Rozważmy strunę. Jest ona zaczepiona na końcach i może się wyginać góra–dół, co jest opisywane przez funkcję $y(x,t)$. Jest ona funkcją dwóch zmiennych, bo różne kawałki struny mogą się różnie wyginać i oczywiście wszystko zależy od czasu. Działanie dla struny ma postać:

$$S[y] = \frac{1}{2} \int_{t_i}^{t_f} dt \int_0^L dx \left[\mu \left(\dot{y} \right)^2 - T \left(y' \right)^2 \right],$$

gdzie $\dot{y} = \left(\frac{\partial y}{\partial t} \right)_x$, $y' = \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)_t$.[2]
Czy potrafisz podać interpretację fizyczną współczynników μ oraz T? Wyprowadź równania ruchu struny z tego działania. (Rozważamy y które są zadane w chwilach t_i oraz t_f oraz znikają na końcach struny przez cały czas (to znaczy są zamocowane na sztywno). Czy wynik jest dla Ciebie zaskakujący?

3 Fizyka

Ta część jest istotnie ważniejsza. Zaczniemy od szybkiego wprowadzenia w termodynamikę i fizykę statystyczną. Proszę traktować tylko i wyłącznie jako wprowadzenie operacyjne - nauczymy się (mam nadzieję) jak liczyć rzeczy, ale nie zastąpi to (w przyszłości) dobrego kursu, który tłumaczy czemu liczymy to tak a nie inaczej.
Będziemy przez cały czas rozważać układy, które mają ustaloną temperaturę (bo są w kontakcie termicznym z DUŻYM otoczeniem i ono ustala temperaturę). Okazuje się, że wygodną funkcją do opisu takiego układu jest energia swobodna (Helmholtza) zadana jako[3]:

$$F(V, T, ...) = U - TS,$$

gdzie U jest energią wewnętrzną układu, T jego temperaturą a S entropią (wyrażoną za pomocą zmiennych V, T oraz ...). Jeżeli mamy do czynienia z układem magnetycznym polu H, to wygodniej jest wprowadzić energię swobodną Gibbsa:

$$G(V, T, H, ...) = F - HM,$$

[2] Ten zapis oznacza (w pierwszym przypadku): policz pochodną y po czasie t trzymając x jako stałą.
[3] chwilowo pomijamy ew. pole magnetyczne

gdzie M jest magnetyzacją układu.
Energia swobodna ma następujące pochodne cząstkowe[4][5]:

$$\left(\frac{\partial G}{\partial V}\right)_{T,H} = -p$$

$$\left(\frac{\partial G}{\partial T}\right)_{V,H} = -S$$

$$\left(\frac{\partial G}{\partial V}\right)_{T,V} = -M$$

Teraz fizyka statystyczna. Dla układu w temperaturze T wygodnie jest wprowadzić zmienną $\beta = \frac{1}{k_B T}$, gdzie k_B jest stałą Boltzmanna. Ile ona wynosi?
Rozważmy układ o temperaturze T który ma pewne stany o określonych energiach: $E_1, E_2, ...$ Może być ich skończenie lub nieskończenie wiele – bez znaczenia, ale dla ułatwienia zakładamy, że są one dyskretne (tzn. mogę je ponumerować liczbami naturalnymi). Energie mogą się powtarzać, też żaden problem. Prawdopodobieństwo p_n na to, że układ będzie w stanie n (czyli takim, który ma energię E_n) wynosi:

$$p_n = \frac{1}{Z} e^{-\beta E_n},$$

gdzie Z zwane sumą statystyczną jest czynnikiem normalizacyjnym. Ile wynosi Z?
Jeżeli chcemy policzyć wartość oczekiwaną jakiejś wielkości X, to musimy wziąć jej wartość w stanie n, pomnożyć przez prawdopodobieństwo, że układ jest w tym stanie i wysumować po wszystkich stanach:

$$\langle X \rangle = \frac{1}{Z} \sum_n X_n e^{-\beta E_n}.$$

Wyraź wartość oczekiwaną energii $\langle U \rangle$ jedynie za pomocą Z (podpowiedź: rozważ wzięcie logarytmu...). Okazuje się, że Z wiąże się w prosty sposób z energią swobodną[6]:

$$G = -k_B T \log Z$$

3.1 Model Einsteina

3.1.1 Oscylator harmoniczny

Co to jest oscylator harmoniczny każdy wie. Okazuje się, że jest on trochę ciekawszy po skwantowaniu, bo dopuszcza tylko dyskretne stany o energiach[7]:

$$E_n = \hbar\omega \left(n + \frac{1}{2}\right),$$

gdzie $\hbar$ to stała Diraca, a ω jest częstością oscylatora.
Oblicz "minisumę" statystyczną dla oscylatora harmonicznego:

$$z = \sum_n e^{-\beta E_n}$$

[4]Będę wszędzie już pisał G, ale jeżeli nie ma pola magnetycznego, to może być i F
[5]Ponownie, ten zapis oznacza (dla pierwszego) pochodna G po V przy traktowaniu T i H jako stałych parametrów)
[6]U mnie log oznacza logarytm naturalny
[7]wyprowadzenie tej relacji można znaleźć w każdym podręczniku do mechaniki kwantowej

3.1.2 Kryształ

Najprostszy model budowy kryształu zakłada, że jest to zbiór N atomów, każdy z nich może oscylować niezależnie w trzy różne strony (x, y, z), więc jest to układ $3N$ niezależnych oscylatorów. Jeżeli są niezależne, to ich energie po prostu się dodają:

$$E_{n_1,n_2,\ldots,n_{3N}} = \sum_{i=1}^{3N} E_{n_i}$$

Oblicz w tym wypadku sumę statystyczną. (Podpowiedź: sprowadź ją do poprzedniego przypadku.) Stąd wyznacz energię swobodną, entropię oraz ciepło właściwe przy stałej objętości i wykonaj jego wykres od temperatury. Jak się zachowuje dla małych i dużych temperatur T?
Podpowiedź: ciepło właściwe przy stałej objętości jest określone jako:

$$c_v = \frac{1}{N} T \left(\frac{\partial S}{\partial T} \right)_{V,N}$$

4 Paramagnetyzm Pauliego

Rozważmy najprostszy model paramagnetyzmu. Mamy N elektronów w polu magnetycznym B. Każdy z nich może być w stanie $s = \pm 1$ [8]. Jego energia jest wtedy równa:

$$E_s = s\mu H,$$

gdzie H jest polem magnetycznym, a μ pewną stałą (dokładna wartość jest nam bez znaczenia). Zakładamy, że elektrony nie oddziałują ze sobą, więc całkowita energia [9] jest sumą energii:

$$E\left(\{s\}\right) = -\mu H \sum_i s_i.$$

Wyznacz sumę statystyczną, energię swobodną oraz magnetyzację układu. Sprawdź, że tak określona magnetyzacja (jako pochodna energii swobodnej) ma sens, to znaczy pokrywa się z $\langle m \rangle$[10]. Oblicz także podatność magnetyczną:

$$\kappa_T(T, H) = \left(\frac{\partial m}{\partial H} \right)_T$$

i wykonaj wykres $\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \kappa_T(T, 0)$. Czy widzisz jakieś przejście fazowe?

[8] To nie jest spin tylko jego przeskalowana wersja, jakby ktoś pytał
[9] Która jest funkcją wszystkich s, co oznaczam przez $\{s\}$
[10] Proszę pamiętać, że wrzuciliśmy wszystkie stałe do μ!