

Złożona natura płaszczyzny euklidesowej Zadania kwalifikacyjne

Maciej Zwoliński

Rozwiązania zadań proszę przysyłać w formacie pdf lub czytelnych skanów na adres maciej.a.zwolinski@gmail.com. W temacie proszę wpisać "WWW14 rozwiązania - imię, nazwisko".

1 Funkcje - podstawy

1. Znajdź funkcję $f(n) : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$ taką, że dla każdego $q \in \mathbb{Z}$ istnieje $n \in \mathbb{N}$ takie, że $f(n) = q$.

Przez \mathbb{N} oznaczamy zbiór liczb naturalnych, a przez \mathbb{Z} zbiór liczb całkowitych.

2 Operacje na płaszczyźnie

Niech A , B i P będą punktami na płaszczyźnie o współrzędnych, w układzie kartezjańskim, równych odpowiednio $[x_A, y_A]$, $[x_B, y_B]$ i $[x_P, y_P]$.

1. Wyznacz punkt (współrzędne) Q będący wynikiem działania przesunięcia równoległego $A \rightarrow B$ na punkt P .

2. Wyznacz punkt Q będący wynikiem działania jednokładności o skali r i środku w środku układu współrzędnych na punkt P .

Oznaczając przez $J_q(r_q) \triangleright p$ punkt będący wynikiem działania jednokładności o środku w punkcie q i skali r_q na punkt p , wyznacz współrzędne :

3. $J_A(r_A) \triangleright P$ Podpowiedź: można stworzyć tymczasowy układ o środku w punkcie q .

4. Oznaczając $J_A(r_A) \circ J_B(r_B) \triangleright P$ jako $J_A(r_A) \triangleright (J_B(r_B) \triangleright P)$, wyznacz

$J_A(r_A) \circ J_B(r_B) \triangleright P$ i $J_B(r_B) \circ J_A(r_A) \triangleright P$
oraz różnicę powyższych współrzędnych. Spróbuj wyrazić wynik przy użyciu najprostszych operacji.

3 Łukowa miara kąta

Oblicz łukowe miary kątów równych kolejno: 30° , 45° , 60° , 90° , 120° i 180° .

4 Wielomiany

1. Wykaż, nie licząc pozostałych pierwiastków, że 2 jest pierwiastkiem wielomianu $x^4 - 5x^2 + 4$.

2. Znajdź pierwiastki wielomianu o równaniu $x^3 + 7x^2 + 7x - 15$.

5 Granice

1. Wykaż, że jeśli ciąg $a_n = 2^{-n}$, a S_n oznacza sumę n pierwszych wyrazów ciągu a_n , to ciąg S_n ma granicę dla $n \rightarrow \infty$.

2. Wykorzystując twierdzenie o 3 ciągach,znacz granicę

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$$

3. Wykaż, że poniższy ciąg ma granicę

$$e_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$