Logika cyfrowa WWW15

Zbigniew Drozd

Rozwiązania należy przesyłać na adres mailowy zbigniew_drozd@wp.pl, których tytuł zawiera substring ‘[WWW15]’.

Zadanie 1. Napisz w kilku zdaniach jakie masz doświadczenie z matematyką, logiką i fizyką. Jeśli miałeś jakieś przygody z programowaniem mikrokontrolerów to napisz jakie one były.

Zadanie 2. Znajdź w internecie jak wyglądają podstawowe bramki logiczne (AND, NOT, OR, XOR). W poniższych zadaniach możesz używać bramek z więcej niż dwoma wejściami. Jako że oddawanie tych zadań może być problematyczne (bo trzeba rysować żeby je rozwiązywać) akceptowane będą rozwiązania w paincie. W poniższych zadaniach będę naprzemiennie używał pojęć „w stanie wysokim/niskim”, „prawda/fałsz na wejściu/wyjściu”, „1/0” (są one równoznaczne)

- Narysuj układ logiczny z trzema wejściami (a,b,c) i jednym wyjściem (f). Na wyjściu ma być prawda, jeśli parzysta liczba wejść jest prawdziwa.
- Narysuj układ logiczny z trzema wejściami (a_1, a_2, a_3) i trzema wyjściami (o_1, o_2, o_3).
  - $o_3 = a_3$
  - $o_2 = a_2$, jeślli $a_3 = 0$. W.p.p. $o_2 = 0$
  - $o_1 = a_1$, jeśli $a_3 = a_2 = 0$. W.p.p $o_1 = 0$
  - Mniej więcej widać co ten układ robi:
    - szuka zapalonego a_n o najwyższym indeksie
    - ustawia 1 w o_n
    - ustawia 0 na $o_{<0,n-1>}$
  - Spróbuj zapisać funkcję $f(a_0, a_1, \dots , a_n) = o_n$ dla dowolnego n.
- Narysuj układ logiczny z trzema wejściami (a,b,c) i dwoma wyjściami (f,q) taki, że
  - $f = a\oplus b\oplus c$,
  - g= T gdy co najmniej dwa z {a,b,c} są zapalone.
  - Czy wiesz do czego może służyć taki układ?

Zadanie 3. W matematycznej logice mówimy o spójnikach (takich jak implikacja, koniunkcja, negacja, alternatywa). Rozważmy te spójniki jako funkcje $\mathbb{B}^2 \to \mathbb{B}$ (Pomijając negację, która jest funkcją $\mathbb{B}\to\mathbb{B}$).

- Policz ile jest funkcji $\mathbb{B}^2\to\mathbb{B}$.
- Za pomocą spójników {negacji, alternatywy i koniunkcji} jesteśmy w stanie zapisać dowolną funkcję logiczną $\mathbb{B}^N\to\mathbb{B}$. Spróbuj udowodnić czemu tak jest.
- Za pomocą spójników {negacji i alternatywy} lub {negacji i koniunkcji} jesteśmy w stanie zapisać dowolną funkcję logiczną $\mathbb{B}^N\to\mathbb{B}$. Spróbuj udowodnić czemu tak jest. Pomocne mogą się okazać prawa De Morgana.
- Robiąc poprzednie zadanie pewnie zauważyłeś jak podobne są wyrażenia które używają alternatyw do tych używających koniunkcji. Jeśli czujesz się na siłach, udowodnij że każda funkcja zapisana przy użyciu negacji i alternatyw ma swój odpowiednik jako funkcja zapisana wyłącznie przy użyciu negacji i koniunkcji. (Aby przeprowadzić ten dowód prawdopodobnie trzeba sięgnąć do indukcji strukturalnej, więc jeśli nie słyszałeś nigdy o czymś takim to po prostu pomiń to zadanie)
- Czy za pomocą jakiegoś spójnika $\mathbb{B}^2\to \mathbb{B}$ jesteśmy w stanie przedstawić wszystkie możliwe funkcje $\mathbb{B}^N\to\mathbb{B}$? (Bonusowe punkty uznania i szacunku za nierozważenie wszystkich spójników $\mathbb{B}^2\to\mathbb{B}$)

Wskazówka: (Zapis $\mathbb{B}^2 \to \mathbb{B}$ oznacza funkcję dwuargumentową (gdzie każdy element to prawda lub fałsz) zwracającą jeden argument (który też jest prawdą lub fałszem). Przykładowo f(x,y) = T (gdy x = T, y = T), F (w.p.p.) jest funkcją $\mathbb{B}^2 \to \mathbb{B}$ którą pewnie znasz jako koniunkcję)

Zadanie 4. Napisz czego chciałbyś dowiedzieć się podczas warsztatów. Może być to jakaś pod dziedzina logiki cyfrowej, jak i pojedynczy koncept, w stylu implementacja jakiegoś konkretnego układu