

Wymiar liniowy

(wszelkie błędy oraz nieścisłości proszę zgłaszać bezzwłocznie)

Zadania są dość zróżnicowanej trudności, zrobienie zadania 0 (nie trzeba się tego uczyć na pamięć, tylko się oswoić) oraz pierwszych trzech podpunktów zadania 1. jest konieczne, aby się zakwalifikować, wszelkie pytania jak i rozwiązania jak proszę wysyłać na (ten jest częściej sprawdzany) lub na mail podany powyżej.

Rachunek różniczkowy:

0 (bez punktów):

Poznaj podstawowe reguły różniczkowania (z oczywistych względów „rozwiązań” tego zadania nie należy wysyłać, ale oczywiście można zadawać pytania na ten temat) :

- pochodne wielomianów
- pochodną funkcji wykładniczej
- pochodną x^k , gdzie k jest liczbą rzeczywistą
- pochodną logarytmu, sinusa, cosinusa oraz tangensa
- pochodną sumy i różnicy funkcji
- pochodną złożenia funkcji
- pochodną iloczynu funkcji
- pochodną funkcji odwrotnej (jeśli funkcja jest bijekcją)
- pochodną odwrotności funkcji (tam gdzie funkcja nie jest 0)

Zadanie 1 (15 pkt):

Napisz własnymi słowami (najważniejsze jest zrozumienie) dla funkcji $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$:

- co to jest granica ciągu liczb?
- co to znaczy że funkcja jest ciągła?
- co to jest pochodna i jaki ma związek z styczną do wykresu?
- czym różni się różniczkowalność funkcji, od bycia klasy C^1 (co oznacza że pierwsza pochodna jest ciągła), pokaż przykład funkcji różniczkowalnej ale nie C^1
- podaj przykład funkcji gładkiej (innej niż wielomian) czyli klasy C^∞ czyli takiej że dowolnie dużo razy różniczkując otrzymujemy funkcje różniczkowalną

Zadanie 2 (15 pkt):

- udowodnij że każda funkcja ciągła ma własność wartości pośredniej:(dla każdego wyboru a, b) jeśli $f(a)=x$ oraz $f(b)=y$, to na odcinku $[a, b]$ funkcja osiąga wszystkie wartości między x i y (* czy każda funkcja spełniająca taką własność jest ciągła?)
- dla każdej liczby naturalnej k , podaj przykład funkcji klasy C^k (czyli pierwsze k pochodnych jest ciągłych) ale już nie C^{k+1} (czyli $k+1$ pochodna nie jest ciągła lub nie istnieje)
- czy z tego że pochodna funkcji w pewnym punkcie jest dodatnia wynika, że ta funkcja odpowiednio blisko tego punktu, rosnąca? Uzasadnij odpowiedź.