

WWW15: Informacja Kwantowa

Wersja z 13 maja 2019

Rozwiązania i pytania do zadań proszę przesyłać na adres: kbudzikk@gmail.com
Deadline: 31 maja 2019

Algebra liniowa

Wektor ψ o dwóch współrzędnych zespolonych ψ_1, ψ_2 będziemy oznaczać:

$$|\psi\rangle := \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2.$$

Jest to tzw. [notacja braketowa](#)¹. Wektory możemy dodawać i mnożyć przez skalary:

$$|\psi\rangle + |\phi\rangle = \begin{pmatrix} \psi_1 + \phi_1 \\ \psi_2 + \phi_2 \end{pmatrix}, \quad \lambda |\psi\rangle = \begin{pmatrix} \lambda\psi_1 \\ \lambda\psi_2 \end{pmatrix}, \lambda \in \mathbb{C}.$$

Hermitowskie sprzężenie wektora definiujemy jako:

$$\langle\psi| := |\psi\rangle^\dagger := (\psi_1^* \ \psi_2^*),$$

czyli jest to transpozycja (pionowy \rightarrow poziomy) + [sprzężenie zespolone](#) (oznaczane $*$).
Iloczyn skalarny wektorów $|\phi\rangle$ i $|\psi\rangle$ definiujemy jako:

$$\langle\phi|\psi\rangle := (\phi_1^* \ \phi_2^*) \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} = \phi_1^* \psi_1 + \phi_2^* \psi_2,$$

natomiast *normę* wektora (odpowiada długości wektora) jako

$$\|\psi\| := \sqrt{\langle\psi|\psi\rangle}.$$

Zadanie 1 (1 pkt.). *Pokaż rozdzielność mnożenia względem dodawania oraz dodawania względem mnożenia tzn.*

$$\begin{aligned} \lambda(|\psi\rangle + |\phi\rangle) &= \lambda|\psi\rangle + \lambda|\phi\rangle \\ (\alpha + \beta)|\psi\rangle &= \alpha|\psi\rangle + \beta|\psi\rangle. \end{aligned}$$

Zadanie 2 (1 pkt.). *Dla $|\psi\rangle = \begin{pmatrix} 2+i \\ 3-i \end{pmatrix}, |\phi\rangle = \begin{pmatrix} 5+2i \\ 2 \end{pmatrix}$ oblicz*

- $\langle\psi|, \langle\phi|$
- $\langle\phi|\psi\rangle$
- $\|\psi\|$.

Zadanie 3 (1 pkt.). *Udowodnij, że $\langle\phi|\psi\rangle^* = \langle\psi|\phi\rangle$.*

Zadanie 4 (1 pkt.). *Pokaż, że $\|\psi\|^2 = |\psi_1|^2 + |\psi_2|^2$, gdzie $|\cdot|$ oznacza moduł liczby zespolonej.*

¹Wyrażenia na niebiesko mają odnośniki do przykładowych źródeł.

Macierze

Zapoznaj się z mnożeniem macierzy, [hermitowskim sprzężeniem macierzy](#) i [śladem](#). Będziemy rozważać tylko macierze 2×2 o zespolonych elementach, których zbiór oznaczamy $M_2(\mathbb{C})$.

Macierze działają na wektory poprzez mnożenie z lewej strony, a na sprzężenia hermitowskie wektorów poprzez mnożenie z prawej strony:

$$A|\psi\rangle = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}$$
$$\langle\psi|A = \begin{pmatrix} \psi_1^* & \psi_2^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

W pierwszym wypadku wynikiem mnożenia jest wektor, a w drugim wektor sprzężony hermitowsko.

Zadanie 5 (1 pkt.). Pokaż, że $(AB)^\dagger = B^\dagger A^\dagger$, gdzie † oznacza sprzężenie hermitowskie.

Zadanie 6 (2 pkt.). Pokaż, że

$$(A|\psi\rangle)^\dagger = \langle\psi|A^\dagger.$$

(Po lewej stronie mamy sprzężenie hermitowskie wektora $A|\psi\rangle$, a po prawej działamy sprzężeniem hermitowskim macierzy A na sprzężenie hermitowskie wektora $|\psi\rangle$.)

Zadanie 7 (1 pkt.). Udowodnij, że $\text{Tr}(AB) = \text{Tr}(BA)$ dla macierzy 2×2 .

Polaryzacja

Zapoznaj się z podstawowymi pojęciami dotyczącymi fali elektromagnetycznej i polaryzacji (np. rozdział 34. Resnick, Walker, Halliday, "Podstawy Fizyki" Tom 4).

Zadanie 8 (1 pkt.). Składowe pola magnetycznego fali elektromagnetycznej rozchodzącej się w próżni mają postać

$$B_y = B \sin(kz + \omega t), \quad B_x = B_z = 0.$$

- Jaki jest kierunek rozchodzenia się fali?
- Podaj składowe pola elektrycznego tej fali.
- Czy ta fala jest spolaryzowana? Jeśli tak, to jaki jest kierunek polaryzacji?

Zadanie 9 (1 pkt.). Pozioma wiązka pionowo spolaryzowanego światła o natężeniu I przechodzi przez układ dwóch polaryzatorów. Kierunek polaryzacji pierwszego polaryzatora tworzy z kierunkiem pionu kąt $0^\circ < \alpha < 90^\circ$, a kierunek polaryzacji drugiego polaryzatora jest poziomy. Ile wynosi natężenie światła po przejściu przez układ polaryzatorów?

Zadanie 10 (1 pkt.). Ile wynosi natężenie światła po przejściu przez układ z poprzedniego zadania, jeśli wiązka padająca jest niespolaryzowana?

Dodatkowe pytania

11. Czy uczestniczyłaś/eś w moich warsztatach rok temu?