Kwalifikacyjne zadania

9 maja 2020

1 Wstęp

Rozwiązania proszę wysyłać na adres: po394403@students.mimuw.edu.pl z dopiskiem w temacie "[WWW] Imię nazwisko" w terminie ustalonym przez organizatorów. Rozwiązanie powinno być czytelne i precyzyjne, będzie miało to wpływ na punktację. Robienie wszystkich zadań nie będzie konieczne, ale nie mogę na razie zagwarantować jaki będzie próg. Warto wysyłać zadanie wcześniej niż termin, wtedy dostaniecie informację zwrotną i będziecie wysyłać poprawki. Częściowe rozwiązania także będą oceniane. W razie problemów, uwag, wątpliwości, poprawek (nawet literówek) piszcie na wyżej podanego maila.

2 Teoria grup

Definicja 1 *Grupą nazywamy zbiór* **G** *wyposażony w działanie dwuargumentowe nazywane mnożeniem (a czasem dodawaniem)* $(x, y) \to x \odot y$*, które spełnia aksjomaty:*

1) *łączność* $\forall x, y, z \in G \quad (x \odot y) \odot z = x \odot (y \odot z)$

2) *istnieje element neutralny* e*, tż* $\forall x \in G \; x \odot e = e \odot x = x$

3) *dla każdego elementu* g *istnieje element (obustronnie) odwrotny oznaczany* g^{-1} *spełniający:* $g \odot g^{-1} = g^{-1} \odot g = e$

Zadanie 1 (0.5 pkt) Uzasadnij, że możemy uprościć zapis i dla dowolnej n-tki elementów z G jednoznacznie określić co to znaczy $a_1 \odot a_2 \odot a_3 \odot a_3 \odot \cdots \odot a_n$. Jaki aksjomat nam to gwarantuje? Czy mówi nam to coś o *nieskończonych* iloczynach?

Zadanie 2 (2 pkt) Rozstrzygnij czy dany obiekt jest grupą, a następnie uzasadnij odwołując się do definicji (np. wskazując który aksjomat nie jest spełniony):

- $(\mathbb{R}, \cdot)$ liczby rzeczywiste wraz z działaniem mnożenia jako działaniem

- $(\mathbb{Z}, +)$ liczby całkowite z dodawaniem

- $\emptyset$ zbiór z działaniem pustym

- $\{0\}$ singleton zera z dodawaniem

- $\{0, 1\}$ z dodawaniem, czy można zdefiniować na tym zbiorze strukturę grupy z jakimś innym działaniem?

- $\{0 \dots n\}$ to samo pytanie co wyżej

- $\{\mathbb{N}, +\}$ liczby naturalne z dodawaniem

Zadanie 3 (2 pkt) Rozważmy alfabet łaciński $\mathfrak{A}$ i rozważmy M jako wszystkie możliwe (skończone)słowa* nad tym alfabetem, wraz z działaniem określonym na literach i przyjmującym wartości w M $\forall a, b \in \mathfrak{A}$ $a \odot b = ab$. Opisz w jaki sposób można rozszerzyć to działanie na całe M, tak żeby było łączne. Czy M z takim działaniem jest grupą? Ile minimalnie trzeba usunąć elementów, żeby dostać grupę (z tym samym działaniem) ? Czy możesz wskazać jak dodać minimalną liczbę elementów tak, aby na powiększonym zbiorze uzyskać grupę z działaniem zgodnym z tym na M?
* *skończonym słowem jest także słowo puste*

Definicja 2 *Grupę G nazywamy przemienną (abelową) gdy $\forall a, b \in G$ $a \odot b = b \odot a$*

Zadanie 4 (2 pkt) Przykłady grup nieprzemiennych

1) Które z grup z poprzednich zadań są abelowe? Uzasadnij

2) Rozstrzygnij dla jakich n istnieje grupa nieprzemienna o n elementach

a) dla $n \in \{1 \dots 10\}$

b) dla n pierwszych

3 Podstawy teorii mnogości

Definicja 3 *Relacją* $\sim$ *na zbiorze* A *nazywamy dowolny podzbiór iloczynu kartezjańskiego* $A \times A$*. Mówimy że para* (a, b) *jest w relacji, co zapisujemy* $a \sim b$*, gdy* $(a, b) \in \sim$

Definicja 4 *Relacją równoważności na* A *nazywamy relację, która jest zwrotna symetryczna i przechodnia.*
Formalnie:

zwrotna $\forall a \in A \; a \sim a$

symetryczna $\forall a, b \in A \; a \sim b \implies b \sim a$

przechodnia $a \sim b$ *i* $b \sim c$ *to* $a \sim c$

Relacja równoważności to fundamentalny koncept matematyki, jest to też zupełnie naturalne pojęcie, którym posługujemy się na co dzień. Należy o niej myśleć w następującym sensie, wzorcem relacji równoważności jest równość (sprawdź), fakt że dwa elementy są w relacji traktujemy jak osłabioną równość, równość pod względem pewnej cechy. Prostym przykładem jest kolor włosów, możemy powiedzieć, że jeśli dwie osoby mają ten sam kolor włosów to są w relacji. Wyznacza nam to relację równoważności, każdy ma taki kolor włosów jaki ma :). Jeśli jedna osoba ma taki sam kolor jak druga to i odwrotnie (symetria), przechodniość też jest spełniona.
Często myślimy bardziej abstrakcyjnie np. o wszystkich osobach o włosach koloru blond jako o blondynach, tym samym utożsamiamy ze sobą elementy będące w relacji. Dla wybranego elementu, zbiór elementów będących z nim w relacji nazywamy klasą abstrakcji. Dla wybranej klasy abstrakcji dowolny jej element nazywamy reprezentantem klasy. Zbiór klas abstrakcji danej relacji $\sim$ nazywamy zbiorem ilorazowym i zapisujemy $A/\sim$.

Zadanie 5 (1 pkt) Czy istnieje relacja równoważności R, o podanych własnościach? Uzasadnij, jeśli odpowiedź jest pozytywna, wskaż przykład.

5.1) Określona na zbiorze liczb naturalnych $\mathbb{N}$ i mająca dokładnie 7 klas abstrakcji, wszystkie nieskończone

5.2) Określona na arbitralnym zbiorze A i mająca jedną klasę abstrakcji

5.3) Określona na A i mająca dokładnie tyle klas abstrakcji ile elementów ma A

Zadanie 6 (1 pkt) Funkcja $f : A \to B$ w naturalny sposób wyznacza relację równoważności na A. Opisz tę relację i uzasadnij dlaczego jest to relacja równoważności. Co możesz powiedzieć o klasach abstrakcji gdy jest to injekcja? bijekcja?

Zadanie 7 (1 pkt) Załóżmy, że na A mamy relację równoważności $\sim_0$, oraz mamy **surjekcję** $f : A \to B$. Określamy relację $f(a) \sim_1 f(b) \iff a \sim_0 b$. Czy jest to relacja określona na całym B? Czy jest to relacja równoważności?

Zadanie 8 (3 pkt) Załóżmy, że na A mamy relację równoważności $\sim_0$, oraz mamy funkcję $f : A \to B$, która spełnia $a \sim_0 b \implies f(a) = f(b)$. Udowodnij że f można przedstawić jako złożenie $\tilde{f}(\pi)$, gdzie $\pi : A \to A/\sim_0$ to funkcja przypisujaca elementowi jego klasę abstrakcji, relacji $\sim_0$, zaś $\tilde{f} : A/\sim_0 \to B$. Czy funkcja $\tilde{f}$ jest wyznaczona jednoznacznie? Załóżmy że istnieje zbiór C i funkcja $g : A \to C$ spełniające analogiczną własność co $A/\sim_0$ wraz z π, czyli dla każdej f spełniającej założenia zadania istnieje jednoznacznie wyznaczone $\tilde{f} : C \to B$, że $f = \tilde{f}(g)$. Czy możesz wskazać związek między C a $A/\sim_0$?

4 Analiza

Zadanie 9 (2 pkt) Zadanie 2.3 z warsztatów **Teoria miary** Pana Mieszka Zimnego.

Zadanie 10 (2 pkt) Udowodnij lub zaprzecz:
Mając funkcję $a : \mathbb{N} \times \mathbb{N} -> \mathbb{R}$ ($a(x,y)$ oznaczamy $a_{x,y}$), taką że dla każdego ustalonego n granica $\lim_{m\to\infty} a_{n,m}$ istnieje (niekoniecznie jest skończona), także dla każdego ustalonego m $\lim_{n\to\infty} a_{n,m}$ granica istnieje.
Implikuje to $\lim_{n\to\infty}(\lim_{m\to\infty} a_{n,m}) = \lim_{m\to\infty}(\lim_{n\to\infty} a_{n,m})$