TEORIA ZBIORÓW

WERSJA 3.05

Informacje wstępne

Zadania należy wysyłać na adres mailowy mati.kan.2000@gmail.com w terminie do 17 maja (zachęcamy by wysłać je wcześniej - możemy się wtedy do nich odnieść przed końcem czasu). Można je wysyłać w dowolnej, czytelnej formie (polecamy spisywać komputerowo, zwłaszcza w LaTeX). Warto wysyłać również niedokończone rozwiązania - je także będziemy starali się oceniać. Pytania odnośnie zadań lub warsztatów prosimy kierować na powyższy adres e-mail.

Łącznie można zdobyć 50 punktów, do których liczą się zadania bez $\star$. Zadania z $\star$ są nieobowiązkowe, jednak polecamy je zrobić. Staraliśmy się, żeby lista, którą teraz czytacie była ostateczna, jednak może sie zdarzyć, że będzie jeszcze poprawiana. Wówczas nowe zadania prawdopodobnie będą dorzucane jako zadania z $\star$.

Przed wykonywaniem zadań polecamy wyszukać w Internecie materiały i zapoznać się z relacjami, w szczególności relacjami równoważności i porządku, a także logiką pierwszego rzędu (polecamy dwa pierwsze rozdziały skryptu Logika dla Informatyków: http://www.mimuw.edu.pl/ urzy/calosc.pdf).

Podstawy logiki

Zadanie 1 ($6 \times 1 = 6$ punktów)

Dla poniższych formuł powiedz, czy formuła jest prawdziwa, spełnialna, czy fałszywa:

- $p \lor q \lor r \Rightarrow ((p \lor q) \land \neg r) \lor (r \land p \land q)$
- $(p \Rightarrow (q \Rightarrow r)) \Rightarrow ((p \Rightarrow q) \Rightarrow (p \Rightarrow r))$
- $\neg(p \land (\neg p \land q))$
- $(\neg p \Rightarrow \neg q) \Rightarrow ((\neg p \Rightarrow q) \Rightarrow p)$
- $((p \Rightarrow q) \land (q \Rightarrow p)) \Rightarrow (p \lor q)$
- $\neg(((p \lor q) \land \neg p) \Rightarrow q)$

Zadanie 2 ($2 \times 2 = 4$ punkty)

Które z poniższych zdań są prawdziwe dla dowolnych formuł zdaniowych ψ i ϕ?

1. Jeśli $\psi \Rightarrow \phi$ i $\neg\psi \Rightarrow \phi$ są tautologiami, to ϕ jest tautologią.
2. Jeśli $\psi \Rightarrow \phi$ jest tautologią oraz $\neg\psi \Rightarrow \phi$ jest spełnialna, to ϕ jest spełnialna.

Relacje

Zadanie 1 (2 punkty)

Dane są relacje równoważności R i S określone na tym samym zbiorze. Czy $R \cup S$ musi być relacją równoważności? Czy $R \cap S$ musi być relacją równoważności?

Zadanie 2 (4 punkty)

Czy dla danego zbioru X, $|X| > 1$ można tak określić relację R, by równocześnie:

1. Zbiór $\langle X, R \rangle$ był zbiorem częściowo uporządkowanym,
2. R była relacją równoważności w X?

Zadanie 3 (4 punkty)
Niech $\langle X, R \rangle$ będzie zbiorem częściowo uporządkowanym. Czy prawdą jest, że jeśli każdy łańcuch i każdy antyłańcuch w X jest skończony, to X jest skończony?

Zadanie 4 (4 punkty)
Czy dla dowolnego zbioru X i dowolnej relacji $R \subseteq X \times X$ prawdą jest, że jeżeli istnieje rodzina $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ taka, że $R = \bigcup\{A \times A : A \in \mathcal{A}\}$, to R jest relacją równoważności na X?

Zadanie 5 (6 punktów)
Czy istnieje izomorfizm porządkowy (czyli bijekcja taka, że $x \leqslant y \iff f(x) \leqslant f(y)$) z $\mathbb{Q}$ z naturalnym porządkiem w $\{0,1\} \times \mathbb{Q}$ z porządkiem leksykograficznym?

Logika pierwszego rzędu

Zadanie 1 (2 punkty)
Korzystając wprost z definicji semantyki języka pierwszego rzędu pokaż, że formuła $\forall x \exists y\ x < y$ jest prawdziwa w strukturze, której unierwsum jest zbiór liczb naturalnych a interpretacją symbolu $<$ jest naturalny porządek na liczbach.

Zadanie 2 (4 punkty)
(Zadanie 8, rozdział drugi ze skryptu) Udowodnić, że zdanie:

$$\forall x \exists y\ p(x,y) \wedge \forall x \neg p(x,x) \wedge \forall x \forall y \forall z (p(x,y) \wedge p(y,z) \Rightarrow p(x,z))$$

ma tylko modele nieskończone.

Zadanie 3 (4 punkty)
Sygnatura Σ składa się z jednego binarnego symbolu relacyjnego $\leqslant$ i dwóch unarnych symboli relacyjnych P i R. W tym zadaniu rozważamy tylko struktury, które są skończonymi liniowymi porządkami z relacją $\leqslant$. W takiej strukturze można traktować relacje P i R jako sposób zapisu binarnego liczb naturalnych p i r. Napisz zdanie logiki pierwszego rzędu nad sygnaturą Σ, które będzie prawdziwe wtedy i tylko wtedy, gdy $p = r + 1$.

Wstęp do zadań 4 i 5
(n,k)-kratką nazwiemy strukturę składającą się ze zbioru $\{a_{i,j} | i,j \in \mathbb{N} \wedge i < n \wedge j < k\}$. oraz dwóch relacji binarcnych H oraz V takich, że:

- $a_{i,j} H a_{i',j'}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $j = j'$ i $i' = i + 1$,
- $a_{i,j} V a_{i',j'}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $i = i'$ i $j < j'$

Powiemy, że funkcja f, która może używać symboli relacyjnych H i V oraz dodatkowo unarnego predykatu P *definiuje* funkcję $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdej (n,k) kratki istnieje taka interpretacja predykatu P, że kratka K z tą interpretacją P jest modelem formuły Φ wtedy i tylko wtedy, gdy $n = f(k)$.

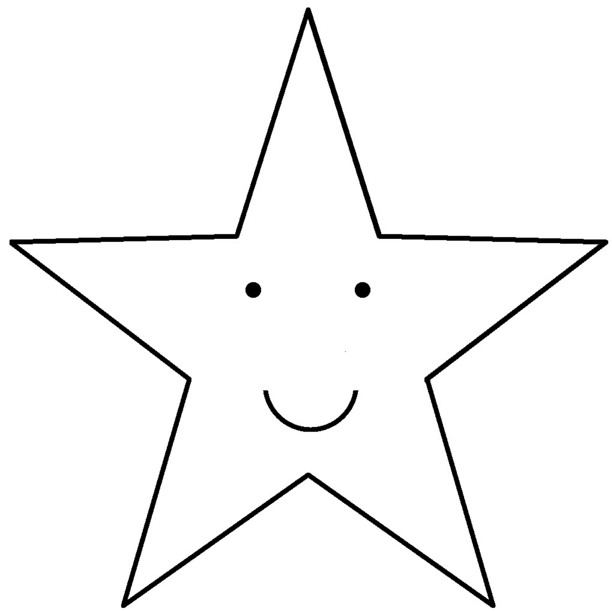
Przykład: modelami formuły $\Phi = \forall x \neg \exists y x H y$ są wszystkie $(1,k)$ kratki, więc ta formuła definiuje funkcję $f(k) = 1$. (W tym przypadku ta własność zachodzi dla dowolnego P).

Zadanie 4 (4 punkty)
Czy istnieje formuła logiki I rzędu definiująca funkcję $f(k) = 2k$? Dlaczego?

Zadanie 5 (6 punktów)
Czy istnieje formuła logiki I rzędu definiująca funkcję $f(k) = 2^k$? Dlaczego?

Zadania z $\star$

Zadanie 0 (0 punktów)
Pokoloruj gwiazdkę:



Zadanie 1 (10 punktów)
O strukturze nad sygnaturą składającą się z jednego binarnego symbolu relacyjnego E możemy myśleć, jak o grafie skierowanym. Czy istnieje zdanie logiki pierwszego rzędu nad tą sygnaturą, które jest prawdziwe tylko w tych strukturach, których reprezentacja w postaci grafu jest spójna?

Zadanie 2 (10 punktów)
Myśliwy złapał nieskończnie wiele niedźwiedzi i mówi tak: teraz założę na wasze durne łby kapelusze - każdemu biały albo czarny, a potem będziecie po kolei zgadywać, jaki macie kapelusz na głowie. Jeśli tylko skończenie wielu z was się pomyli puszczę was wolno, w przeciwnym razie zrobię z was bigos. Czy niedźwiedzie mają sposób, by się uratować?

Zadanie 3 (10 punktów)
Napisz zdanie w języku logiki pierwszego rzędu używające stałej 0, symboli funkcyjnych $+, \times$, które jest prawdziwe w świecie liczb naturalnych ze standardową interpretacją symboli i stałej wtedy i tylko wtedy, gdy prawdziwa jest hipoteza Collatza.

Zadanie 4 (10 punktów)
Rozważmy spełnialne zdania logiki pierwszego rzędu z dwoma zmiennymi, bez równości, nad strukturą składającą się z n symboli relacji binarnych. Jaka jest najmniejsza liczba naturalna k taka, że każde takie zdanie ma model o mocy mniejszej od k?

Wersja dla ambitnych: co, gdy dopuszczamy używanie równości?

Zadanie ω (ω punktów)
Udowodnij (lub obal) hipotezę Riemanna i naucz jeżdżącego na monocyklu niedźwiedzia prezentować twój dowód.