Zadania kwalifikacyjne
Podstawy teorii gier

1 Wstęp

Rozwiązania proszę wysyłać na adres: mt394587@students.mimuw.edu.pl z dopiskiem w temacie ”[WWW] Imię nazwisko” w terminie ustalonym przez organizatorów. Rozwiązania można przesyłać w dowolnym formacie możliwym do otworzenia za pomocą ogólnie dostępnych programów. Robienie wszystkich zadań nie jest konieczne, ale warto zapoznać się z ich treścią i dodatkowymi komentarzami. Zadania wysłane przed terminem postaram się sprawdzić jak najszybciej, by podesłac moje uwagi i dać możliwość wysłania poprawek. Częściowe rozwiązania także będą oceniane. W razie problemów, uwag, wątpliwości, poprawek(nawet literówek) lub pytań piszcie na wyżej podanego maila. Postaram się odpowiedzieć w ciągu 24 godzin.

2 Pojęcie gry

Podczas warsztatów będziemy zajmowali się pewnymi specyficznymi rodzajami gier: grami w postaci strategicznej (GS), grami ekstensywnymi (GE) i grami koalicyjnymi (GK). Ich bardziej szczegółowe przedstawienie znajdzie się w dalszej części pliku z zadaniami. odbiegają one dość znacząco od aktywności, które w życiu codziennym nazywamy "grami", choć i do nich można z powodzeniem stosować przedstawione podczas zajęć twierdzenia i pojęcia. Byłoby to jednak obarczone dużym stopniem skomplikowania, ja zaś postaram się przedstawić podstawowe pojęcia Teorii Gier na nieco prostszych przypadkach. Aby nieco lepiej 'poczuć' ducha gier, jakimi będziemy się zajmować, polecam wykonać poniższe zadanie:

Zadanie 1. (1 pkt.) Wejdź na stronę https://ncase.me/trust/ i zapoznaj się z zamieszczoną tam grą. W odpowiedzi prześlij wynik, który uzyskałeś grając na pięciu początkowych 'przeciwników' (ilość punktów zdobytych/ilość możliwych).
Przedstawiona powyżej strona pozwala zapoznać się z pierwszymi dwoma typami gier: w formacie strategicznym i ekstensywnymi.

3 Gry w postaci strategicznej (GS)

Gry w postaci strategicznej opisują sytuacje, w których gracze podejmują decyzję jednocześnie, bez znajomości decyzji pozostałych graczy. W sposób formalny gry w postaci strategicznej są opisane przez trójkę: $GS = \langle N, (A_i)_{i\in N}, (u_i)_{i\in N}\rangle$, gdzie:
$N \subset \mathbb{N}$ - zbiór graczy (gracz 1, gracz 2, gracz 3,..., gracz n).
A_i - zbiór akcji gracza i. Bardzo często będziemy zakładać, że zbiór akcji każdego gracza jest jednakowy.
u_i - funkcja $u_i : A_1 \times ... \times A_n \to \mathbb{R}$ zwracająca zysk (lub stratę) gracza i-tego dla konkretnego wyboru akcji przez wszystkich graczy.

Formalny opis wydaje się być nieco skomplikowany i zazwyczaj da się go przedstawić w prostszej postaci. Jeśli w grze występują dwaj gracze, można ją przedstawić w postaci **macierzy wypłat**.

Przykład 1. Polowanie na jelenia (Stag hunt) 2 myśliwych może polować na jelenia lub na dwa zające. Ich decyzje zapadają jednocześnie i niezależnie, tzn. bez wiedzy o decyzji drugiego. Jeleń ma wartość 8, zające po 1. Każdy z nich ma 2 akcje do wyboru: J, Z. Jeśli obaj zapolują na jelenia (akcje J) to upolują go, otrzymując po 4. Jeśli jeden wybierze J, drugi Z, to pierwszy nic nie upoluje (otrzymuje 0), drugi upoluje oba zające (otrzymuje 2). Jeśli obaj wybiorą Z, to otrzymują po 1.

W tym przykładzie mamy:
$N = 1, 2$
$A_1 = \{J, Z\}, A_2 = \{J, Z\}$
$u_1(J, J) = 4; u_1(J, Z) = 0; u_1(Z, J) = 2; u_1(Z, Z) = 1$
$u_2(J, J) = 4; u_2(J, Z) = 2; u_2(Z, J) = 0; u_2(Z, Z) = 1$

I macierz wypłat przedstawia się następująco (przyjmuje się, że pierwsza wartość w polu oznacza wypłatę gracza 'wierszowego'):

	J	Z
J	$4, 4$	$0, 2$
Z	$2, 0$	$1, 1$

Zadanie 2. (3 pkt.) Narysuj macierz wypłat dla gry ze strony https://ncase.me/trust/ w jej podstawowej wersji. Wypisz A_1 i zdefiniuj funkcję u_1 przez podanie jej wartości na wszystkich elementach dziedziny.

Gra zdefiniowana w zadaniu drugim często bywa nazywana 'dylematem więźnia'.

Zadanie 3. (2 pkt.) Narysuj macierz gry 'kamień, papier, nożyce' (przyjmujemy, że zwycięzca dostaje od przegranego 1 jednostkę, zaś w wypadku remisu obaj gracze dostają 0).

Zadanie 4. (2 pkt.) Rozważmy grę 'wojna płci' zadaną macierzą (B-boks, S-siatkówka)

	B	S
B	$2, 4$	$0, 0$
S	$1, 1$	$4, 2$

Załóżmy, że grana jest strategia (B, B) (tzn. każdy z partnerów decyduje, ze chce iść na boks) Uzasadnij, że żaden z graczy nie może polepszyć swojej wypłaty zmieniając akcję na inną.

Sytuację przedstawioną w zadaniu 4. nazywamy '**równowagą Nasha** w strategiach czystych' (RNC). Pojęcie równowagi Nasha jest bardzo istotne w teorii gier. Wyznacza ono sytuację, gdy żaden z graczy nie może polepszyć swojej sytuacji zmieniając swoją decyzję, co gwarantuje pewnego rodzaju 'stabilność' sytuacji.

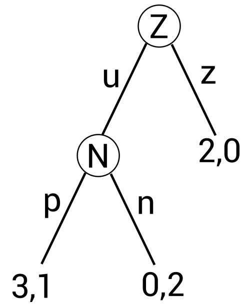
Zadanie 5. (4 pkt.) Znajdź wszystkie RNC w grach opisanych w Zadaniach 1. 2. 3. 4. (uzasadnienie może być skrótowe, ważniejsze w tym zadaniu jest wyrobienie sobie pewnej intuicji).

Zadanie 6. (3 pkt.) Może się zdarzyć, że gracze podejmują konkretne akcje z pewnym prawdopodobieństwem. Nazywamy to **strategią mieszaną**, a decyzje konkretnego gracza - **profilem gracza**. Policz spodziewany wynik gracza wierszowego w poniższej grze ('kotek i myszka'), jeśli profil gracza wierszowego to $\langle 0.7; 0.3 \rangle$ (co oznacza, że w 70% przypadków gra strategię L, zaś w 30% przypadków strategię P), zaś gracza kolumnowego: $\langle 0.2; 0.8 \rangle$

	L	P
L	$-5, 2$	$3, 1$
P	$3, 1$	$-5, 2$

4 Gry ekstensywne (GE)

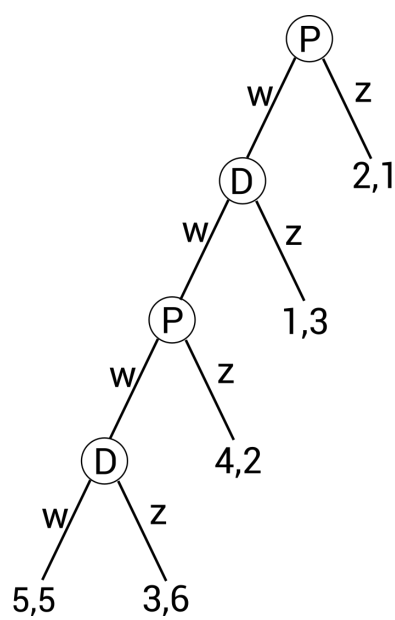
Gry ekstensywne różnią się od gier w postaci strategicznej czasem podejmowania decyzji. W GS gracze podejmowali decyzje jednocześnie, w GE gracze podejmują decyzje sekwencyjnie, następstwo czasowe odgrywa kluczową rolę. Gry tego typu wygodnie jest przedstawiać za pomocą schematów poniższego typu (formalny opis pojawi się podczas warsztatów):



(Ilustracja, jak i nieco przeformułowany opis pochodzą z pewnej książki ekonomicznej) W tej grze bierze udział dwóch graczy: właściciele ziemscy (Z) i niewolnicy (N). Właściciele ziemscy są postawieni przed wyborem. Mogą zatrzymać niewolników (z) i wówczas otrzymują 2 jednostki pewnego dobra lub ich uwolnić (u). Jeśli niewolnicy zostaną uwolnieni stoją przed wyborem: mogą płacić za swoją wolność właścicielom ziemskim 3 jednostki spośród 4, które udaje im się wyprodukować na wolności (okazuje się, że obcinanie ludziom rąk może znacząco obniżać ich efektywność) albo nie płacić i przenieść się na inne terytorium, by tam zarabiać 2, zaś właściciele ziemscy pozostają z niczym. Mówimy przykładowo, że wypłata gracza Z po historii (u,n) wynosi 2. Zauważmy, że graczowi N nie opłaca się wybierać strategii p. Postępując racjonalnie (czyli dążąc do maksymalizowania zysków) zawsze będzie wybierał strategię n. Świadomy tego gracz Z powinien wybrać strategię z, by zmaksymalizować swoje zyski.

Zadanie 7. (2 pkt.) Podaj wypłaty graczy po historii (u,p). Czy optymalna strategia gracza Z ulegnie zmianie, jeśli będzie świadom, że przynajmniej w 80% przypadków gracz N wybierze opcję p?

Zadanie 8. (2 pkt.) Znajdź racjonalną strategię dla gracza pierwszego (P) i gracza drugiego (D) w przedstawionej poniżej grze (uwaga: w odpowiedzi należy podać akcję wybraną dla każdego węzła, w którym dany gracz może podejmować decyzję). Uzasadnij odpowiedź.



5 Gry koalicyjne (GK)

W grach koalicyjnych gracze (oznaczani jako elementy ($\{1, 2, 3, ..., n\}$) łączą się w koalicje (podgrupy $\{1, 2, 3, ..., n\}$) , by zmaksymalizować swój zysk. Każdej koalicji $T \subseteq \{1, 2, 3, ..., n\}$ przypisujemy wartość $v(T)$ (przy czym $v(\emptyset) = 0$). Będziemy żądać by każdy uczestnik koalicji miał wypłatę nie mniejszą niż gdyby nie brał udziału w koalicji. Podstawowym zagadnieniem będzie podział wartości tzw. wielkiej koalicji (czyli wartość całego zbioru) pomiędzy wszystkich jej członków (czyli wyznaczenie $\phi_1, \phi_2, ..., \phi_n$ takich, że $\sum_{i=1}^{n} \phi_i = v(\{1, 2, ..., n\}))$.

Zadanie 9. (2 pkt.) Rozważmy grę koalicyjną, w której bierze udział trzech graczy. Załóżmy, że: $v(\{1\}) = v(\{2\}) = v(\{3\}) = 0; v(\{1, 2\}) = v(\{1, 3\}) = v(\{2, 3\}) = a; v(\{1, 2, 3\}) = 1$. Dla jakich $a \in [0; 1]$ jesteśmy w stanie tak podzielić wypłatę z wielkiej koalicji, by graczom nie opłacało się założyć żadnej mniejszej koalicji, czyli $\forall T \subseteq \{1, 2, 3\} : \ v(T) \leq \sum_{t \in T} \phi_t; \ \phi_1 + \phi_2 + \phi_3 = v(\{1, 2, 3\})$.

Zbiór wypłat graczy spełniający wymagania zadania dziewiątego nazywamy **rdzeniem**.

Zadanie dodatkowe (6 pkt.) Wróćmy jeszcze raz do https://ncase.me/trust/ . Przyjmując macierz wypłat z pojedynczej rozgrywki:

	T	B
T	$1, 1$	$-1, 2$
B	$2, -1$	$0, 0$

Narysuj macierz wypłat dla gry dwóch graczy polegającej na wybraniu jednej ze strategii (Copycat, All Cheat, All Cooperate, Grudger, Detective) w grze trwającej pięć rozgrywek (przykładowo $u_1(AllCheat, AllCooperate) = 5 \cdot 2 = 10$). Znajdź wszystkie Równowagi Nasha (wystarczy wskazanie, nie trzeba wykazywać, że są RN).