Podstawy teorii homotopii

Michalina Horecka

19 maja 2020

W trakcie warsztatów interesować nas będą dwa rodzaje obiektów matematycznych *grupy* oraz *przestrzenie topologiczne*.

Grupy

Tutaj zapoznasz się z definicją *grupy* oraz podstawowymi przykładami.

Definicja (grupa)

Grupą nazywamy zbiór G wraz z działaniem $\odot$ które spełniają następujące aksjomaty:

1. (Łączność) dla dowolnych $a, b, c \in G$ zachodzi:

$$a \odot (b \odot c) = (a \odot b) \odot c$$

2. (Identyczność) Istnieje $e \in G$ takie że dla dowolnego $a \in G$, zachodzi:

$$a \odot e = e \odot a = a$$

3. (Odwrotność) Dla każdego $a \in G$ istnieje $b \in G$, takie że

$$ab = ba = e$$

Uwagi do definicji

1. Łączność mówi nam, że kolejnośc nawiasowania nie ma znaczenia. Zamiast $a \odot (b \odot c)$ możemy więc pisać $a \odot b \odot c$.
2. Zamiast pisać $\underbrace{a \odot \ldots \odot a}_{n \text{ razy}}$ piszemy a^n.
3. Zarówno identyczność (zwana również elementem neutralnym) jak i element odwrotny są wyznaczone jednoznacznie. Z racji tego element odwrotny będziemy oznaczać a^{-1}.
4. W ogólności równość $ab = ba$ nie zachodzi - grupy nie zawsze są obiektami przemiennymi. Jeśli jednak dla dowolnych $a, b \in G$ równość zachodzi, mówimy że grupa jest abelowa (przemienna).

Przykładem grupy będą:

1. Zbiór permutacji pewnego zbioru X z działaniem składania permutacji.
2. Liczby całkowite $\mathbb{Z}$ z działaniem dodawania.
3. Zbiór $\mathbb{Z}_4 = \{0, 1, 2, 3\}$ z działaniem dodawania modulo 4.

Grupą NIE jest:

1. Zbiór liczb naturalnych $\mathbb{N}$ z działaniem dodawania - brakuje elementów odwrotnych.
2. Rodzina podzbiorów $P(X)$ pewnego zbioru X z działaniem sumy zbiorów $\cup$ - problem jak wyżej.

Zadanie 1 *Sprawdź, czy poniższe obiekty są grupami. Jeśli nie, wymień, których aksjomatów nie spełniają:*

a) Liczby całkowite $\mathbb{Z}$ z działaniem dodawania $+$.

b) Liczby całkowite $\mathbb{Z}$ z działaniem mnożenia $\cdot$.

c) Liczby naturalne $\mathbb{N}$ z działaniem dodawania $+$.

d) Zbiór $\mathbb{Z}_n = \{0, 1, \ldots, n-1\}$ z działaniem dodawania mod n.

e) Zbiór $\mathbb{Z}_n = \{1, \ldots, n-1\}$ z działaniem mnożenia mod n, w zależności od n.

f) $P(X)$ - rodzina podzbiorów wybranego zbioru X z działaniem różnicy symetrycznej.

g) Rodzina wszystkich funkcji (z działaniem składania funkcji) $f : X \to X$ dla pewnego zbioru X.

h) Rodzina wszystkich bijekcji (z działaniem jak wyżej) $f : X \to X$.

i) (*) Rodzina wszystkich ciągłych bijekcji z odcinka w odcinek. (uzasadnić)

Które z tych grup są abelowe?

Zadanie 2 *W tym zadaniu zdefiniujemy bardzo przydatny obiekt, którym będziemy posługiwać się podczas zajęć. Działanie które na nim zdefiniujemy nie tworzy grupy, w szczególności nie jest nawet łączne. Twoim zadaniem jest wymyślić, jak zmienić definicje aby stało się łączne - być może będziesz musiał utożsamić pewne pętle.*

Pętlą na potrzeby tego zadania nazwiemy ciągłą funkcję (definicja w części o przestrzeniach topologicznych) $f : [0;1] \to \mathbb{R}^2$*, taką, że* $f(0) = f(1) = (0,0)$*. Na zbiorze pętli wprowadzamy działanie* $\odot$ *zwane konkatenacją:*

$$(f \odot g)(t) = \begin{cases} f(2t) & t \leqslant \frac{1}{2} \\ g(2t-1) & t > \frac{1}{2} \end{cases}$$

Intuicyjnie pętla to opis pewnego spaceru po płaszczyźnie, mówi w jakim punkcie płaszczyzny znajdujemy się w czasie t*. Konkatenacja dwóch pętli mówi nam, że najpier wykonujemy pierwszy spacer, a następnie od razu zaczynamy spacerować drugą ścieżką - wszystko to w czasie pojedynczego spaceru.*

Rząd

1. Liczbę elementów zbioru G nazywamy rzędem grupy i oznaczamy $|G|$
2. Rzędem elementu $g \in G$ nazywamy najmniejsze takie n że $g^n = e$.

Przydatne grupy i oznaczenia

Jeśli nie oznaczono inaczej, poniższe grupy będziemy nazywać następującymi symbolami i pomijać symbol działania

1. $\mathbb{Z}_n = \{0, \ldots, n-1\}$ z działaniem dodawania modulo n.
2. $\mathbb{Z}$ liczby całkowite z dodawaniem.
3. D_n grupa symetrii n-kąta foremnego (obroty i odbicia)

Zadanie 3 ** Pokaż, że rząd elementu dzieli rząd grupy.*

Zadanie 4 *Pokaż, że każda grupa o rzędzie* p *będącym liczbą pierwszą jest izomorficzna z* $\mathbb{Z}_p$ *z działaniem dodawania mod* p*.*

Homomorfizm

Homomorfizmem grup $(G, \odot)$ oraz $(F, \otimes)$ nazywamy funkcję $\varphi : G \to F$ która spełnia warunek:

$$\varphi(g_1 \odot g_2) = \varphi(g_1) \otimes \varphi(g_2)$$

Jeśli φ jest różnowartościowe, to nazywamy je *monomorfizmem*, zaś jeśli jest surjekcją - *epimorfizmem*. *Izomorfizmem* nazywamy bijektywny homomorfizm.

Zadanie 5 *Pokazać, że jeśli* $\varphi : G \to H$ *jest homomorfizmem to:*

a) $\varphi(e) = e$,

b) $\varphi(g^{-1}) = \varphi(g)^{-1}$,

c) Jest monomorfizmem wtw, gdy nie istnieje $g \neq e$ *takie że* $\varphi(g) = e$.

Zadanie 6 *Sprawdzić, czy homomorfizmami są:*

a) $\varphi : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $\varphi(s) = 2s$,

b) $\varphi : D_n \to \mathbb{Z}_2$ *przypisujące odbiciom jedynkę, a obrotom zero,*

c) $\varphi : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $\varphi(s) = s + 5$.

Czy podane homomorfizmy są epi? Mono?

Produkt grup

Definiujemy *produkt grup* $\{G_i\}_{i=1}^n$:

$$\prod_{i=1}^{n} G_i = G_1 \times \cdots \times G_n = \{(g_1, \ldots, g_n) : g_i \in G_i, i \in \{1, \ldots, n\}\}.$$

Zadanie 7 *Jakie działania należy na nim wprowadzić, żeby też był grupą? Co jest jego elementem neutralnym, jak wyglądają elementy odwrotne?*

Grupa wolna i relacje

Kolejnym ważnym przykładem który będzie nam potrzebny w trakcie warsztatowych rozważań jest grupa wolna.
Słowem s nad alfabetem S nazywamy dowolny skończony ciąg elementów z S. Konkatenację (niefortunnie mamy tu kolizję oznaczeń) słów s, s' oznaczamy jako ss'. Rozważmy zbiór słów nad pewnym zbiorem S z działaniem konkatenacji. Posiada on element neutralny - słowo puste - które oznaczmy symbolem ε. Działanie jest też łączne. Nie ma jednak elementów odwrotnych.
Rozszerzmy więc nasz alfabet o dodatkowe symbole s^{-1} dla $s \in S$ i dodajmy regułę, że ilekroć w słowie pojawia się ss^{-1} - zastępujemy je słowem pustym. Tak utworzony obiekt ma strukturę grupy, którą nazywamy grupą wolną i oznaczamy go przez F_S.

Zadanie 8 *Pokaż, że dla* $|S| = 1$, *grupa wolna* F_S *jest izomorficzna do* $\mathbb{Z}$.

Grupy wolne dają nam świetne narzędzie do opisu większości grup, którymi będziemy się zajmować. Jest ona w pewnym sensie "najogólniejszą" grupą która zawiera niezwiązane ze sobą elementy z S. Możemy jednak w podobny sposób uzyskać inne grupy.

Grupa zadana przez relacje

Niech S będzie zbiorem generatorów. Weźmy listę równości postaci:

$$s_1 \dots s_n = e$$

Gdzie $s_1, \dots, s_n \in S \cup S^{-1}$. Jest to lista relacji, bęzie określana jako R.

Przykład 1 *Niech $S = \{a, b\}$. Mamy relacje:*

$$a^3 = e,\ b^2 = e,\ aba^{-1}b = e$$

Możemy je przekształcić:

$$a^3 = e,\ b = b^{-1},\ ab = b^{-1}a$$

$$a^3 = e,\ b = b^{-1},\ ab = ba$$

Zatem każde słowo z tej grupy możemy sprowadzić do któregoś z poniższych:

$$\{e, a, b, a^2, ab, a^2b\}.$$

Prezentacja grupy

Zapis:

$$< S \mid R >$$

nazywamy *prezentacją grupy.* Każda grupa ma prezentację, nawet więcej niż jedną.

Zadanie 9 *Spróbować zgadnąć prezentacją jakiej grupy jest*

$$< a, b \mid a^3 = \ b^2 = \ aba^{-1}b = e >$$

z poprzedniego przykładu. Napisać izomorfizm tych grup.

Przestrzenie topologiczne

Zbiór otwarty, zbiór domknięty, topologia

W trakcie warsztatów będziemy mówić o podzbiorach $\mathbb{R}^n$, więc zdefiniujemy topologię tylko na tych przestrzeniach. *Kulą otwartą o środku w punkcie x i promieniu r* nazywamy zbiór punktów odległych od x o mniej niż r. Natomiast *kulą domkniętą o środku w punkcie x i promieniu r* nazywamy zbiór punktów odległych od x o mniej niż lub dokładnie r. *Zbiorem otwartym* w $\mathbb{R}^n$ będziemy nazywać taki jego podzbiór $U \subset \mathbb{R}^n$, że dla każdego punktu $x \in U$ znajdziemy kulę otwartą wokół x, która zawiera się w U. Dopełnienie zbioru otwartego nazywamy *zbiorem domkniętym.*
Własności:

1. każdy zbiór otwarty w $\mathbb{R}^n$ jest sumą pewnej (być może nieskończonej) rodziny kul otwartych,
2. suma dowolnej liczby zbiorów otwartych jest zbiurem otwartym,
3. przecięcie skończonej liczby zbiorów otwartych jest zbiorem otwartym.

Zadanie 10 *Pokazać, że każda kula otwarta jest zbiorem otwartym, a każda kula domknięta zbiorem domkniętym.*

Zadanie 11 *Stwierdzić, czy podane zbiory są otwarte lub domknięte:*

a) $\emptyset$,

b) $\mathbb{R}$,

c) $(0,1)$,

d) $[0,1]$,

e) $(0,1]$,

f) $\{(a,b) \in \mathbb{R}^2 : -1 < a < 1,\ b \in \mathbb{R}\}$,

g) $\{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 : \sqrt{a^2+b^2} \leqslant 1,\ c = 0\}$,

h) $\{x \in \mathbb{R} : x \text{ wymierne}\}$,

i) $\{(a,b) \in \mathbb{R}^2 : -1 < a < 1,\ \ -1 \leqslant b < 1\}$.

Dla podzbioru $X \in \mathbb{R}^n$ definiujemy jego podzbiór otwarty jako taki, który pochodzi od jakiegoś zbioru otwartego w $\mathbb{R}^n$. Zatem $U \subset X$ jest otwarty, jeśli istnieje takie otwarte $U' \subset \mathbb{R}^n$, że $U' \cap X = U$. Dla domkniętych definicja jest analogiczna. Ogół zbiorów otwartych w X nazywamy *topologią* na X.

Przykład 2 *Każdy zbiór jest otwarty sam w sobie, zbiór pusty jest otwarty w każdym zbiorze.*

Przykład 3 *Niech*

$$X = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = 0\}.$$

Zbiór

$$X = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -1 < x < 1,\ y = 0\}$$

jest otwarty w X, bo pochodzi od kuli otwartej o promieniu 1 w $\mathbb{R}^2$.

Zadanie 12 *Czy podane zbiory są otwarte lub domknięte w $[0,1] \cup \{2\}$:*

a) $(0,1)$,

b) $[0,1)$,

c) $\{0\}$,

d) $\{2\}$.

Funkcja ciągła

Mówimy, że funkcja $f : X \to Y$, gdzie $X \subset \mathbb{R}^n$, $Y \subset \mathbb{R}^m$ jest *ciągła*, jeśli przeciwobraz przez tą funkcję zbioru otwartego w Y jest otwarty w X. Funkcję nazywamy *homeomorfizmem*, jeśli jest ciągłą bijekcją i jej odwrotność też jest ciągła.

Alternatywnie, w wypadku podzbiorów $\mathbb{R}^n$ możemy myśleć o definicji metrycznej funkcji ciągłej:
Niech X, Y będą podzbiorami $\mathbb{R}^n$

$$f : X \to Y$$

jest ciągła, jeśli zachodzi następujący warunek, $d(x, y)$ oznacza odległość punktów x, y.

$$\forall_{x \in X} \forall_{\varepsilon > 0} \exists_{\delta > 0} \forall_y d(x, y) < \delta \Rightarrow d(f(x), f(y)) < \varepsilon$$

lub intuicyjnie, kiedy małe przemieszczenie w przestrzeni argumentów, skutkuje małym przenieszczeniem w przestrzeni wartości funkcji.

Topologia produktowa

Niech dane będą zbiory $\{X_i\}_{i=1}^n$ wraz z topologiami na nich. *Topologią produktową* na zbiorze:

$$\prod_{i=1}^n X_i = X_1 \times \cdots \times X_n = \{(x_1, \ldots, x_n) : x_i \in X_i, i \in \{1, \ldots, n\}\}$$

nazywamy ogół zbiorów, które są sumami dowolnej liczby zbiorów postaci

$$U_1 \times \cdots \times U_n$$

gdzie U_i jest otwarty w X_i.

Przykład 4 *W $\mathbb{R}^n$ takimi zbiorami są na przykład iloczyny n odcinków otwartych, więc prostopadłościany. Możemy zauważyć, że jeżeli w definicji zbioru otwartego w $\mathbb{R}^n$ zastąpimy kule takimi zbiorami, to nic się nie zmieni.*

Spójność, drogowa spójność

Zbiór $X \subset \mathbb{R}^n$ jest *spójny*, jeśli *nie* daje się przedstawić jako suma dwóch rozłącznych zbiorów otwartych w X. Zbiór X nazywamy *drogowo spójnym*, jeśli dla każdych dwóch jego punktów $x, y \in X$ istnieje funkcja ciągła, zwana drogą od x do y, $\gamma : [0, 1] \to X$, taka, że $\gamma(0) = x$ a $\gamma(1) = y$.

Przykład 5 *Zbiór $[0, 1] \cup [2, 3]$ nie jest spójny, bo jest sumą zbiorów otwartych w tym zbiorze $[0, 1]$ i $[2, 3]$.*

Zadanie 13 *Sprawdzić, czy podane zbiory są spójne:*

a) kula otwarta w $\mathbb{R}^n$,

b) zbiór końców odcinka $[0, 1]$,

c) $([0, 1] \cup [2, 3]) \times \mathbb{R}$,

d) liczby niewymierne.

Zadanie 14 (*) *Znaleźć przykład zbioru, który jest spójny, ale nie jest drogowo spójny.*

Zadanie 15 *Pokazać, że zbiór* $\mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{Q}^2$ *jest drogowo spójny.*

Rozwiązania proszę przesyłać na adres lenny.blackhunter@gmail.com.