

Zadania kwalifikacyjne

1 Wstęp

Zadania proszę wysyłać na adres mieszko1037@gmail.com z tematem "[Teoria miary] Imię i nazwisko" do 20 maja. Forma jest zupełnie dowolna, byleby czytelna. Zachęcam do wysyłania zadań wcześniej, ponieważ wtedy wyślę odpowiedź z moimi uwagami i podpowiedziami. Nie trzeba robić wszystkich zadań. Warto wysyłać nawet częściowe rozwiązania, ponieważ będę je brał pod uwagę przy ocenianiu. W razie jakichkolwiek wątpliwości, problemów itd. - też piszcie.

2 Analiza

0. Znajdź w dowolnym źródle definicje granicy ciągu oraz sumy szeregu.

1. Udowodnij bezpośrednio z definicji granicy, że $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin n}{n} = 0$.

2. Udowodnij bezpośrednio z definicji sumy szeregu, że $\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$, gdy $|q| < 1$.

3. W dawnych matematycznych czasach (XVII - XVIII wiek) nie istniała jeszcze ścisła terminologia i aksjomatyka. Wieloma pojęciami posługiwano się wyłącznie "intuicyjnie", co prowadziło do wielu paradoksów. Oto przykład zagadnienia, które w tych czasach było prawdziwym, poważnym problemem matematycznym. Rozważmy sumę nieskończoną $s = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n$. Z jednej strony mamy

$$s = (1 - 1) + (1 - 1) + (1 - 1) + \dots = 0 + 0 + 0 + \dots = 0$$

z drugiej strony

$$s = 1 + (-1 + 1) + (-1 + 1) + (-1 + 1) + \dots = 1 + 0 + 0 + 0 + \dots = 1$$

z trzeciej strony

$$1 - s = 1 - (1 - 1 + 1 - \dots) = 1 - 1 + 1 - \dots = s \text{ skąd } s = \frac{1}{2}$$

Wytłumacz źródło owego paradoksu i wyjaśnij, czemu we współczesnej matematyce już on nie występuje.

Niech $A \subseteq \mathbb{R}$ będzie dowolnym podzbiorem. **Ograniczeniem górnym** zbioru A nazywamy dowolną liczbę $x \in \mathbb{R}$ która jest niemniejsza od każdego elementu A . Za ograniczenie górne dowolnego zbioru przyjmujemy także ∞ . Najmniejsze ograniczenie górne zbioru A nazywamy jego **kresem górnym** lub **supremum** i oznaczamy $\sup A$. Analogicznie definiujemy ograniczenie dolne oraz kres dolny

lub infimum jako największe ograniczenie dolne. Przyjmujemy przy tym, że $\sup \emptyset = -\infty$ oraz $\inf \emptyset = \infty$. Supremum i infimum zawsze istnieją, ale nie będę tego dowodził (często przyjmuje się to za aksjomat zbioru liczb rzeczywistych).

4. Wyznacz kresy następujących zbiorów:

a)

$$\left\{ \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}_+ \right\}$$

b)

$$\left\{ \frac{11}{k} - \frac{3}{m} : k, m \in \mathbb{N}_+ \right\}$$

gdzie \mathbb{N}_+ oznacza zbiór liczb naturalnych dodatnich.

3 Teoria mnogości

Jest jasne, że jeżeli chcemy mówić o mierzeniu rzeczy, to musimy nauczyć się w jakiś sposób mówić o zbiorach nieskończonych. Każda sensowna figura lub bryła jest przecież nieskończonym zbiorem punktów. Narzędzi do tego celu dostarcza nam dziedzina matematyki nazywana teorią mnogości. Nam będzie potrzebne tylko jedno z tych narzędzi, a mianowicie pojęcie zbiorów przeliczalnych.

Funkcję $f : A \rightarrow B$ nazywamy **iniekcją**, jeżeli jest różnowartościowa.

Funkcję $f : A \rightarrow B$ nazywamy **suriekcją**, jeżeli każdy element B jest obrazem pewnego elementu A .

Funkcję $f : A \rightarrow B$ nazywamy **bijekcją**, jeżeli jest iniekcją i suriekcją.

Intuicyjnie bijekcja jest więc połączeniem w pary elementów dwóch zbiorów.

Dwa zbiory A i B nazywamy **równolicznymi**, jeżeli istnieje bijekcja $f : A \rightarrow B$.

Zbiór nazywamy **przeliczalnym**, jeżeli jest równoliczny z pewnym podzbiorem zbioru \mathbb{N} liczb naturalnych. Jak łatwo zauważyć zbiór przeliczalny jest skończony lub równoliczny z \mathbb{N} .

0. Przeczytaj następujące trzy artykuły:

http://www.deltami.edu.pl/temat/matematyka/teoria_mnogosci/2018/12/28/Hotel_Hilberta/

http://www.deltami.edu.pl/temat/matematyka/teoria_mnogosci/2019/04/29/Jak_policzyc_nieskonczone/

http://www.deltami.edu.pl/temat/matematyka/teoria_mnogosci/2019/05/26/Nie_kazda_jest_taka_sama_/

1. Które z poniższych zbiorów są przeliczalne? Odpowiedź uzasadnij.

a) zbiór wielomianów w współczynnikach całkowitych

b) zbiór liczb niewymiernych

c) zbiór ciągów (x_n) liczb rzeczywistych takich, że $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$

d) zbiór ciągów (x_n) liczb całkowitych takich, że $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$

2. Udowodnij, że suma przeliczalnie wielu zbiorów przeliczalnych jest zbiorem przeliczalnym.

4 Zadania z gwiazdką

Na koniec kilka zadań "z gwiazdką", które są już bardzo bezpośrednio związane z tym, czym będziemy się zajmować na zajęciach. Na pewno nie będą one konieczne do kwalifikacji, ale gorąco zachęcam do zapoznania się z nimi.

1. Udowodnij, że okrąg bez punktu można podzielić na dwie rozłączne części, z których, za pomocą samych obrotów, można złożyć cały okrąg.

2. Niech U będzie przeliczalną rodziną otwartych przedziałów zbioru liczb rzeczywistych \mathbb{R} , taką, że każda liczba wymierna znajduje się w pewnym przedziale należącym do U . Niech Ω będzie zbiorem wszystkich takich rodzin. Oczywiście Ω jest niepusta, bo na przykład $\{\mathbb{R}\} \in \Omega$, $\{(-\infty, \sqrt{2}), (\sqrt{2}, \infty)\} \in \Omega$. Wyznaczyć wartość

$$\inf\left\{\sum_{I \in U} |I| : U \in \Omega\right\}$$

gdzie $|I|$ oznacza długość przedziału I .