Równanie Diraca
zadania kwalifikacyjne

Łukasz Majsiak

Maj 2020

Zadania proszę wysyłać na lukasz.majsiak na gmailu. W temacie wpisujcie [WWW16] i ewentualnie co tam jeszcze chcecie. Zadania punktowane są w pełni subiektywnie.

Zadanie 0

Napisz coś o swoim stanie wiedzy i jeśli chcesz, to o sobie. Głównie odnieś się do rzeczy, które wymieniłem w opisie na stronie i w wymaganiach. Przykład: czy dopiero usłyszysz o postulatach mechaniki kwantowej, czy może już nimi wymiotujesz? A jeśli je poznałæś, to się zachwyciłæś, czy też przeciwnie, budzą w Tobie obrzydzenie, bo są naciągane i nieciekawe? Brak stosunku emocjonalnego również jest akceptowalny.

Zadanie 1

Równanie ewolucji temperatury w jednowymiarowym drucie wygląda następująco (gdzie $T = T(x, t)$ jest temperaturą w punkcie x w chwili t):

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

Czemu tempo zmian temperatury danego punktu jest proporcjonalne do drugiej pochodnej jej zmian wzdłuż drutu w tym punkcie? Czemu nie pierwszej, czwartej albo π-tej? Jak i czemu powinno wyglądać to równanie w większej liczbie wymiarów, np. na płaszczyźnie?
Poziom oczywistości: ciepło przepływa z cieplejszego do zimniejszego w tempie proporcjonalnym do różnicy temperatur.

Zadanie 2

Przekonaj mnie, że teza podstawowego twierdzenia rachunku całkowego jest intuicyjnie oczywista. Potem przekonaj mnie, że pole pod krzywą jest tym samym, co całka rozumiana "fizycznie" [1]. Zauważ, że dopiero teraz możesz świadomie liczyć całki fizyczne przez zastosowanie wzorków. Alternatywnie, jeśli poprzednie jest za proste i czujesz się kozakiem, przekonaj mnie o oczywistości tezy twierdzenia Stokesa.

[1] Czyli np. całkujemy prędkość przez podział toru ruchu na przedziały, gdzie jest ona w przybliżeniu stała, tam znamy wzór $s = vt$, więc go stosujemy i dodajemy wszystko; i tak nieskończenie drobno.

Zadanie 3

Kiedyś miałem w domu takie krany na dwa kurki z ciepłą i zimną wodą. Teraz mam te nowoczesne, gdzie się reguluje osobno temperaturę i ciśnienie. I tak się zastanawiam: kiedy wcześniej podkręciłem infinitezymalnie gorącą wodę, to wzrosła zarówno temperatura, jak i ciśnienie... co ja biedny mam zrobić teraz, żeby uzyskać dokładnie ten sam efekt? Wcześniej też wiedziałem jak odkręcenie jednego kurka wpłynie na np. średni przepływ przez oba dopływy, a teraz skąd mam wiedzieć, jak zmieni się średni przepływ, kiedy majstruję przy temperaturze? Zadanie polega na sparametryzowaniu stanu wody w kranie na dwa sposoby: raz przez przepływ wody ciepłej i zimnej, drugi raz przez temperaturę i ciśnienie (czy kran się będzie odkręcał od zera do jeden czy do pięciu, to mnie nie interesuje, czy temperaturę przyjmiesz bezwzględną, czy liczoną od średniej (a jak prościej?), nieważne, możesz zrobić co ci się żywnie podoba, byle sensownie) i powiązaniu ich zależnościami (jak $T(\text{zimna}, \text{ciepla})$ czy $\text{zimna}(T, p)$). Następnie należy udzielić mi odpowiedzi na moje rozterki, czyli wyrazić np. $\mathrm{d}(\text{ciepla})$ w zależności od $\mathrm{d}T$ i $\mathrm{d}p$ (i tak dla wszystkich czterech parametrów wyrazić ich różniczki przez parę różniczek drugiej parametryzacji) oraz $\frac{\partial}{\partial T}$ w zależności od $\frac{\partial}{\partial \text{zimna}}$ i $\frac{\partial}{\partial \text{ciepla}}$ (i tak dla wszystkich).
Hint: jeśli właśnie złapałeś się za głowę, to proponuję obczaić przenoszenie się między różnymi układami współrzędnych. Jak wyrazić $\mathrm{d}\phi$ z układu biegunowego w zależności od kartezjańskich $\mathrm{d}x$ i $\mathrm{d}y$? Jak wyrazić $\frac{\partial}{\partial x}$ w zależności od $\frac{\partial}{\partial r}$ i $\frac{\partial}{\partial \phi}$?

Zadanie 4

Jeśli masz jakieś ciekawe spostrzeżenia o fizyce czy matematyce, jakieś dobre pomysły warte rozwinięcia, wpisz je tutaj, chyba że nie chcesz.

Zadanie dodatkowe, dla chętnych

Dana jest funkcja holomorficzna F określona w otoczeniu zera, taka że $F(0) = 0$ i $F'(0) < 1$. Niech F^n oznacza n-krotne złożenie funkcji ze sobą, a F^{-n} n-krotne złożenie jej odwrotności. Niech A będzie dowolną stałą zespoloną. Niech F_n taka, że $\forall z\, F_n(z) = F^{-n}(A \cdot F^n(z))$. Pokaż, że dla każdego A istnieje otoczenia zera, w którym (F_n) jest jednostajnie zbieżny.