Topologia algebraiczna

Warsztaty w ramach XVI Wakacyjnych Warsztatów Wielodyscyplinarnych

Paweł Czyż

Słowem wstępu

Topologowie mają dość niecodzienne poglądy – wszystkie wielokąty są dla nich takie same (okrąg) i zdarza im się pomylić obwarzanek z porannym kubkiem kawy. Można wręcz przewrotnie zapytać – czy w topologii są w ogóle różne obiekty? Okazuje się, że już odróżnienie sfery od dętki torusa, czy zwykłej płaszczyzny od przestrzeni trójwymiarowej jest dość trudnym zadaniem...

Na pomoc przyjdzie nam (w uproszczonym wydaniu) teoria homologii, która zajmuje się liczeniem dziur w przestrzeni przy pomocy prostej algebry liniowej – operacji na wektorach i macierzach.

Plan warsztatów

1. homeomorfizm, a homotopijna równoważność przestrzeni,
2. algebra homologiczna (kompleks łańcuchowy przestrzeni wektorowych i jego homologia, lemat o zygzaku),
3. homologia singularna (i zredukowana), ciąg Mayera-Vietorisa,
4. jak odróżniać standardowe przestrzeni topologiczne (sfery i przestrzenie Euklidesowe różnych wymiarów, torus),
5. klasyczne twierdzenia topologii algebraicznej – twiedzenie Brouwera o punkcie stałym, twierdzenie Borsuka-Ulama, twierdzenie o włochatej sferze i, jakże użyteczne, twierdzenie o równym podziale kanapki,
6. ... a jeśli czas pozwoli, to przejdziemy do ambitniejszych tematów. Być może rozmaitości i dwoistość Poincaré, CW-kompleksy, teoria kohomologii singularnej lub de Rhama.

Caveat emptor Jako, że topologia algebraiczna jest ogromną dziedziną, to będziemy przyjmować dużo uproszczeń, od czasu do czasu machać rękami i raczej liczyć przykłady niż dowodzić abstrakcyjne twierdzenia. Mam nadzieję, że to rozbudzi ciekawość i zachęci do tematu. (A wyrobione intuicje przydadzą się później, już na uniwersyteckich kursach topologii algebraicznej).

Wymagania Ze strony topologicznej będziemy dość nieformalnie posługiwać się pojęciem przestrzeni topologicznej. Warto mieć wyrobione pewne intuicje, jak ciągłość, spójność czy zwartość. W szczególności dobrze jest wiedzieć dlaczego okrąg to nie prosta.

Ze strony algebraicznej trzeba znać podstawy algebry liniowej – działania na wektorach i macierzach. Najtrudniejszymi pojęciami z jakich będziemy korzystać są jądro i obraz przekształcenia liniowego oraz przestrzeń ilorazowa.

Literatura

1. rozdział 9. notatek A. Lendy,
2. notatki S. Jackowskiego z topologii,
3. notatki P. Walczaka z algebry liniowej (szczególnie strony 23 i 24, które tłumaczą czym jest przestrzeń ilorazowa),
4. artykuł A. Bojanowskiej o algebrze homologicznej,
5. rozdziału drugiego książki A. Hatchera (jeśli ktoś ma ochotę zobaczyć co będziemy robić. Przy czym ten materiał jest znacznie ogólniejszy).

Kontakt W razie pytań, próśb o polecenie książek do przeczytania czy chęci wysłania zadań kwalifikacyjnych, zachęcam do kontaktu na adres `pawel.czyz` w domenie `st-hughs.ox.ac.uk`. Wpisanie w temacie hasła, które przykuje moją uwagę pozwoli odróżnić mi Wasze maile od nieważnych wiadomości – ustalmy, że temat będzie zaczynał się od ZOOPSYCHOLOGIA. (Zagadka – co to słowo ma wspólnego z homologią?)

Zadania kwalifikacyjne

Ta wersja zadań została poszerzona o wzorcowe rozwiązania.

Uwaga. *Można czerpać z dowolnej literatury, internetu oraz różnego rodzaju wskazówek. Możecie też współpracować nad rozwiązaniami zadań.*

Proszę natomiast zaznaczyć źródła oraz wkład innych osób – to dobry naukowy nawyk.

Homotopijna równoważność

Komentarz. *Po policzeniu dwóch przykładów koncepcja* homotopijnej równoważności *staje się naturalna. Definicji i wskazówek można szukać w internecie lub literaturze.*

Zadanie 1.

a) **(4 punkty)** Pokaż, że przestrzeń Euklidesowa $\mathbb{R}^n$ jest homotopijnie równoważna z punktem.

b) **(1 punkt)** Dlaczego dla $n > 0$ *nie jest* do niego homeomorficzna?

Rozwiązanie.

a) Rozważmy jednopunktową przestrzeń $P = \{p\}$. Mamy włożenie $i\colon P \hookrightarrow \mathbb{R}^n$ dane wzorem $p \mapsto 0$ oraz funkcję $r\colon \mathbb{R}^n \to P$. Oczywiście $r \circ i = \mathrm{id}_P$. W drugą stronę mamy funkcję stałą $i \circ r(x) = 0$, która jest homotopijna do $\mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}$ poprzez

$$F(x,t) = t \cdot 0 + (1-t) \cdot x$$

b) Liczba punktów się nie zgadza. (Lub zwartość).

Zadanie 2.

a) **(4 punkty)** Pokaż, że przestrzeń Euklidesowa bez punktu $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ jest homotopijnie równoważna ze sferą S^n.

b) **(1 punkt)** Dlaczego *nie są* homeomorficzne?

Rozwiązanie.

a) Mamy oczywiste włożenie $i\colon S^n \hookrightarrow \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ oraz retrakcję $r\colon \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \to S^n$ daną wzorem $x \mapsto x/||x||$. Oczywiście $r \circ i = \mathrm{id}_{S^n}$. W drugą stronę mamy $i \circ r(x) = x/||x||$. Zauważmy, że ta funkcja jest homotopijna do identyczności poprzez

$$F(x,t) = tx + (1-t)x/||x||$$

(Warto zauważyć, że rzeczywiście ta funkcja jest dobrze określona, to znaczy $F(x,t) \neq 0$).

b) Sfery są zwarte, przestrzenie Euklidesowe (z brakującym punktem czy bez) nie są.

Komentarz. *Dlaczego akurat powyższe przykłady? Jeśli dwie przestrzenie nie są homotopijnie równoważne, to na pewno nie będą też homeomorficzne. Okaże się, że homologia („dziury w przestrzeni”) nie rozróżnia przestrzeni homotopijnie równoważnych, ale wyśmienicie sobie radzi z odróżnieniem sfery od torusa.*

Algebra liniowa

Notacja.

1. *Przez 0 będziemy oznaczać zerowymiarową przestrzeń wektorową. Innymi słowy*

$$0 = \mathbb{R}^0 = \{0\}$$

2. *Przez $W \leqslant V$ będziemy oznaczać fakt, że W jest podprzestrzenią wektorową V.*

Zadanie 3. Niech $V = \mathbb{R}^3$ oraz

$$W = \{(x, y, z) \in V \mid x + y = 0\} \leqslant V$$

a) **(2 punkty)** Znajdź bazę przestrzeni ilorazowej V/W i jej wymiar.

b) **(3 punkty)** Rozstrzygnij czy $(1, 2, 1) + W = (-1, 4, 8) + W$. (Obydwie strony równości żyją w przestrzeni V/W).

Rozwiązanie.

a) W jest przestrzenią dwuwymiarową rozpinaną przez wektory $(1, -1, 0)$ oraz $(0, 0, 1)$. Zatem V/W jest jednowymiarową *przestrzenią wektorową i jej bazą jest dowolna warstwa $v + W$, gdzie $v \notin W$. Na przykład $v = (1, 0, 0)$.*

b) $u + W = v + W$ wtedy i tylko wtedy gdy $u - v \in W$. Obliczmy zatem różnicę $(1, 2, 1) - (-1, 4, 8) = (2, -2, -7) \in W$, więc wskazane warstwy są równe.

Komentarz. *Następne zadanie wymaga największej ilości pracy – będącej prostymi obliczeniami. Nie lubię zadawać zadań tego rodzaju, ale są kształcące.*

Zrób je – zauważ, że dałem takie tylko jedno.

Zadanie 4. Rozważ ciąg odwzorowań przestrzeni wektorowych:

$$0 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \xrightarrow{A} \mathbb{R}^4 \xrightarrow{B} \mathbb{R}^2 \xrightarrow{C} \mathbb{R}^2 \longrightarrow 0$$

gdzie

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \ C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

a) **(4 punkty)** Oblicz macierze BA, CB.

b) **(1 punkt)** Pokaż, że $\operatorname{im} A \leqslant \ker B$ oraz $\operatorname{im} B \leqslant \ker C$. (Jeśli to trudne, spójrz punkt wyżej).

c) **(25 punktów)** Znajdź wymiary i przykładowe bazy następujących przestrzeni:

$$\ker A, \quad \ker B / \operatorname{im} A, \quad \ker C / \operatorname{im} B, \quad \mathbb{R}^2 / \operatorname{im} C$$

Rozwiązanie.

a) $BA = 0$ i $CB = 0$. Niestety trzeba wymnożyć.

b) Mamy $BA = 0$. Zatem dla $v \in \operatorname{im} A$ bierzemy u takie, że $v = Au$. Wówczas $Bv = BAu = 0u = 0$, czyli $v \in \ker B$. Oczywiście zarówno obraz jak i jądro są przestrzeniami wektorowymi. Dowód drugiego zawierania jest całkowicie analogiczny.

c) Liczymy wszystkie możliwe przestrzenie:

$$\begin{aligned}
\ker A &= 0 \\
\ker B = \operatorname{im} A &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ y \end{pmatrix} : x, y, z \in \mathbb{R} \right\} \\
\ker C = \operatorname{im} B &= \left\{ \begin{pmatrix} u \\ u \end{pmatrix} : u \in \mathbb{R} \right\} \\
\operatorname{im} C &= \left\{ \begin{pmatrix} v \\ -v \end{pmatrix} : v \in \mathbb{R} \right\}
\end{aligned}$$

Mamy zatem $\ker A = \ker B/\operatorname{im} A = \ker C/\operatorname{im} B = 0$ *(pusta baza) oraz* $\mathbb{R}^2/\operatorname{im} C \simeq \mathbb{R}$ *z pojedynczym wektorem bazowym* $x + \operatorname{im} C$*, gdzie* $x \notin \operatorname{im} C$ *(na przykład* $x = (1, 0)$*).*

Powiew homologii singularnej

Komentarz. *To zadanie ma długą treść, ale po odszyfrowaniu definicji staje się trywialne.*

Cierpliwość warto nagrodzić wieloma punktami.

Zadanie 5. Mamy zbiór $k+1$ symboli $S_0 = \{[e_i] \mid 0 \leqslant i \leqslant k\}$ nazywanych *zerowymiarowymi sympleksami.* Traktujemy je jako wektory bazowe przestrzeni $V_0 = \mathbb{R}^{k+1}$, innymi słowy wolno nam pisać wyrażenia postaci

$$3[e_0] + \sqrt{2}[e_1] - 5[e_2]$$

dodawać je i mnożyć przez liczby rzeczywiste.

Następnie wprowadzamy zbiór *jednowymiarowych sympleksów* $S_1 = \{[e_i, e_j] \mid 0 \leqslant i < j \leqslant k\}$, które podobnie należy traktować jak wektory bazowe przestrzeni $V_1 = \mathbb{R}^{\binom{k+1}{2}}$. Podobnie można dodawać takie kombinacje i mnożyć je przez liczby rzeczywiste.

Ponadto wprowadzamy dodatkowe symbole $[e_i, e_j]$ dla $i \geqslant j$ przyjmując $[e_i, e_j] = -[e_j, e_i]$. (W szczególności $[e_i, e_i] = 0$).

Kolejnym krokiem są *dwuwymiarowe sympleksy* $S_2 = \{[e_i, e_j, e_l] \mid 0 \leqslant i < j < l \leqslant k\}$ i przestrzeń wektorowa $V_2 = \mathbb{R}^{\binom{k+1}{3}}$.

Podobnie wprowadzamy dodatkowe symbole $[e_i, e_j, e_l]$, które zmieniają znak przy zamianie dowolnych dwóch „współrzędnych”. Na przykład

$$[e_0, e_1, e_2] = -[e_0, e_2, e_1] = [e_1, e_2, e_0] = -[e_2, e_1, e_0]$$

Wprowadzamy trzy funkcje liniowe nazywane *brzegami*

$$V_2 \xrightarrow{\partial_2} V_1 \xrightarrow{\partial_1} V_0 \xrightarrow{\partial_0} 0$$

poprzez zadanie ich wartości na wektorach bazowych

$$\partial_0[e_i] = 0$$
$$\partial_1[e_i, e_j] = [e_j] - [e_i]$$
$$\partial_2[e_i, e_j, e_l] = [e_j, e_l] - [e_i, e_l] + [e_i, e_j]$$

Zauważ, że $\partial_0 \circ \partial_1 = 0$: dla dowolnego wektora bazowego $[e_i, e_j]$ mamy

$$\partial_0(\partial_1[e_i, e_j]) = \partial_0([e_i] - [e_j]) = \partial_0[e_1] - \partial_0[e_0] = 0 - 0 = 0$$

a) **(8 punktów)** Pokaż, że $\partial_1 \circ \partial_2 = 0$. Innymi słowy rozważ sympleks $[e_i, e_j, e_l]$ i rozpisz wyrażenie

$$\partial_1(\partial_2[e_i, e_j, e_l])$$

b) **(7 punktów)** Wymyśl (lub znajdź) wyrażenie na brzeg n-wymiarowego sympleksu $[e_0, e_1, \ldots, e_n]$.

Rozwiązanie.

a) Liczymy:

$$\partial_1(\partial_2[e_i, e_j, e_l]) = \partial_1([e_j, e_l] - [e_i, e_l] + [e_i, e_j]) = ([e_l] - [e_j]) - ([e_l] - [e_i]) + ([e_j] - [e_i]) = 0$$

b) W ogólności

$$\partial_n[e_0, \ldots, e_n] = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k [e_0, \ldots, e_{k-1}, e_{k+1}, \ldots, e_n]$$

(Pomijamy k-tą „współrzędną”).

Komentarz. *Mamy przestrzenie wektorowe oraz mamy przekształcenia liniowe, których złożenie daje zero... Powinno się to kojarzyć z Zadaniem 4.*

Komentarz. *Poniższe zadanie jest koncepcyjnie ważne dla naszych warsztatów. Ponownie nie ma nic trudnego, poza ćwiczeniem cierpliwości w czytaniu.*

Zadanie 6. Rozważ ciąg przestrzeni wektorowych i funkcji liniowych

$$\cdots \longrightarrow V_2 \xrightarrow{\partial_2} V_1 \xrightarrow{\partial_1} V_0 \xrightarrow{\partial_0} 0$$

takich, że $\partial_n \circ \partial_{n+1} = 0$ dla wszystkich n. Innymi słowy $\operatorname{im} \partial_{n+1} \leqslant \ker \partial_n$ i możemy rozważyć przestrzeń ilorazową

$$H_n = \ker \partial_n / \operatorname{im} \partial_{n+1}$$

nazywanej n-*tą przestrzenią homologii.*

Celem tego ćwiczenia jest obliczenie przestrzenii homologii ciągu

$$\cdots \xrightarrow{\cdot 1} \mathbb{R} \xrightarrow{\cdot 0} \mathbb{R} \xrightarrow{\cdot 1} \mathbb{R} \xrightarrow{\cdot 0} \mathbb{R} \xrightarrow{\cdot 1} \mathbb{R} \xrightarrow{\cdot 0} \mathbb{R} \longrightarrow 0$$

(10 punktów) Uzupełnij wzór poniżej

$$H_n = \begin{cases} ? & n = 0 \\ ? & n = 1, 2, 3 \dots \end{cases}$$

Rozwiązanie. *Mamy* $H_0 = \mathbb{R}/0 \simeq \mathbb{R}$. *(Wymiar wskazuje* jedną *składową łukowej spójności).*

Dla $n = 2k > 0$ *mamy* $H_n = 0/0 \simeq 0$. *Podobnie dla* $n = 2k + 1$ *mamy* $H_n = \mathbb{R}/\mathbb{R} \simeq 0$. *(Wskazuje to na nieobecność „n-wymiarowych dziur").*

Podsumowując

$$H_n \simeq \begin{cases} \mathbb{R} & n = 0 \\ 0 & n = 1, 2, 3 \dots \end{cases}$$

Komentarz. *Trywialne? Trywialne. Okaże się, że to są przestrzenie homologii przestrzeni Euklidesowych* $\mathbb{R}^k$. H_0 *pokazuje, że przestrzeń Euklidesowa jest (łukowo) spójna, a pozostałe* H_n, *że nie ma „n-wymiarowych dziur".*