Zadania kwalifikacyjne na WWW17
„OTW'

Adam Gonstal

8 maja 2021

A Pan ma inną całkę? - Uzasadnienie Równań Einsteina
Wersja 1.2.1

1 Słowo Wstępu

Zanim zaczniesz rozwiązywać zadania warto żebyś zapoznał się z wymaganiami i materiałami edukacyjnymi „przed warsztatami". Deadline jest taki jak na stronie WWW17.

Zadania proszę przysyłać w formacie PDF (sugerowany latex) lub skanów, wrzuconych do PDF'a lub odpowiednio **ponumerowanymi** plikami na **stronę WWW** z Imieniem i Nazwiskiem w tytule. Polecam też wysłać maila, że wrzuciło zadania się na stronę, jeżeli ktoś będzie wysyłał zadania wcześniej.

W razie pytań/wątpliwości co do zadań/pytań natury ogólnej/ogólnej chęci rozmowy zachęcam do kontaktu na mail: ag9@onet.eu.

W tytule e-maila proszę o użycie formatu: [WWW17] Temat[1].
Umożliwi mi to sprawniejsze odpowiedzi na maila. Jeżeli twoja wiadomość nie otrzymała odpowiedzi w przeciągu kilku dni, prosiłbym o ponowne wysłanie.(Co raczej nie powinno się zdarzyć.) Tym razem w tym roku zadania na moje warsztaty będą raczej średnio-trudne.

2 Zadania

Ćwiczenia mają być w domyśle krótkie a Zadania ciut dłuższe (a więc i trudniejsze). Punktów do zdobycia jest 20. Uwaga We wszystkich zadaniach obowiązuje konwencja sumacyjna Einsteina, chyba że napisano inaczej.

Powodzenia!

2.1 Pochodne & Całki

Ćwiczenie 1.1 (1pkt.) Oblicz funkcję:

$$f(x) = \frac{\partial}{\partial x} e^x \sinh(x)\cos(y)$$

$$g(x) = \frac{\partial}{\partial x} \cos(x)\sin(x)$$

Ćwiczenie 1.2 (1 pkt.) Oblicz

$$\int \sin(x)\cos(x)dx$$

$$\int_{-1}^{1} \operatorname{sgn}(x)dx$$

[1]Np. Zadanie / Pytanie dot zadania nr itd.

Pytanie z gwiazdką (nie punktowane) Z jakiego twierdzenia, przy liczeniu tej całki cicho korzystamy w drugim przykładzie w 1.2? I nie chodzi tu Tw. Newtona.

2.2 Algebra Liniowa, czyli o wektorkach

Ćwiczenie 2.1 (1 pkt.)
Napisz definicje wektora, jaką **tobie** się wydaje/jaką znasz.

Ćwiczenie 2.2 (1pkt)
Zapoznaj się z konwencją sumacyjną Einsteina i napisz, jednym zdaniem na czym polega.

Tekst do następnych ćwiczeń/zadań.
Podstawową ideą leżącą u podstaw wektorów, oraz przestrzeni wektorowych jest fakt że istnieje jakiś **najmniejszy**(skończony lub nie) zbiór wektorów wyznaczający[2] wszystkie możliwe wektory które rozważamy (inaczej mówiąc daną przestrzeń wektorową). Ten zbiór nazywamy **bazą** i oznaczamy je e_i, tj. i-ty wektor bazy.

Przykład „szkolny" wektor $s = (a, b)$ oznacza tyle że $s = ae_1 + be_2$, e_i to wektory bazy ,zwykle w „szkolnych" warunkach mówi się o wektorach bazy e_x, e_y czyli o wektorach unormowanych (czyli o długości jeden) w „kierunku" odpowiednio x i y.

Ćwiczenie 2.3 (1 pkt.)
Ile elementów ma baza przestrzeń Euklidesowa dwu wymiarowa? [3] Jak przykładowe wektory bazy będą wyglądały na rysunku? Podaj przykłady przestrzeni która bazy ma:
a)jednoelementowa,
b)czteroelementową

Ćwiczenie 2.4 (1 pkt.)
Mamy sobie wektor $v = 2e_1 + e_2$ w bazie e_1, e_2. Zdefiniujmy sobie bazę $e'_1 = e_1 + e_2, e'_2 = e_1 - e_2$. Znaleźć wektor v w nowej bazie.
Tekst do z ćwiczenia 2.5. Sumując powyższe rozważania można napisać jednym zdaniem: Dla każdego wektora v istnieje e_i baza, taką że wektor ten można zapisać jako

$$v = v^i e_i$$

Rozważmy teraz sobie taki napis, który będzie, „nowym rodzajem" wektora , nazywa się on kowektorem[4]

$$u = u_i e^i$$

, będzie miał takie specjalne własności, że dla dla $i \neq j$

$$e_i e^j = 0,$$

a dla $i = j$ [5]

$$e_i e^j = 1$$

Ćwiczenie 2.5 (1 pkt) a) Rozpisz napis a) uv? b) Policzyć go dla $v = e^1 + 2e^2, u = e_2 + e_3$

[2]za pomocą dodawania i mnożenia
[3]Normalnie wektor-ki na płaszczycie
[4]Inaczej: Kowektor u jest jednocześnie wektorem, ale w innej przestrzeni wektorowej niż v związanej poprzez te następne dwa równania, wyznaczająca przestrzeń kowektorową utworzoną z przestrzeni wektorowej.
[5]czyli $e_i e^i = 1$, ale z kontekstu wynika indeks i jest ustalony, więc chodzi o jeden konkretny indeks, czyli np. $e^1 e_1 = 1$

Do następnego ćwiczeń zapoznaj się z opuszczaniem i podnoszeniem wskaźników, przyda się do ćwiczenia 2.6 i 2.7 a). Wprowadźmy napis

$$g_{ij} := e_i e_j,$$

który będziemy nazywać tensorem metrycznym,[6]jest to iloczyn skalarny dwóch wektorów bazowych.

Ćwiczenie 2.6 (1pkt) Niech $g_{11} = A, g_{22} = B, g_{12} = g_{21} = 0$ Opuść kowektor $p = Be^1 + e^2$ do wektora.

Ćwiczenie 2.7 (2 pkt.)

a) Zapisz uv używając tensora metrycznego. Tu interesuje nas tylko ogólna forma.
b) Podaj przykład przestrzeni, w której $g_{ij} = 1$ dla $i = j$, a reszta $g_{ij} = 0$
c) Podaj przykład przestrzeni w której to tensor metryczny zawiera chociaż jedną nie zerową lub nie jedynkową składowe.

3 Fizyka

Zadanie 3.1 (3pkt) „Prawda czy nie prawda”? Zasada Równoważności

Bardzo często w literaturze popularnonaukowej np klik lub tutaj klik, można spotkać stwierdzenie że będąc w jakimś pomieszczeniu [7](np. w windzie) i czując oddziaływanie w „dół” bez obserwacji świata zewnętrznego **nie istnieje** doświadczenie, które powiedziało by czy przyspieszasz czy jesteś pod wpływem pola grawitacyjnego.

Ile prawdy jest w tym stwierdzeniu, czy jest ono **zawsze** prawdziwe, czy ono jest **prawdą**, półprawdą? czy całkowitym **fałszem?** Odpowiedź uzasadnij. Uwaga Pytanie to jest wbrew pozorom całkiem skomplikowane i odpowiedź NIE jest trywialna, lecz żeby było jasno nie wymagam pisaniu eseju na ten temat.

Zadanie 3.2 (4pkt) Zakrzywienie czasoprzestrzeni u Newtona. Zasada Równoważności v2.

Alicja znajduje u góry rakiety się na wysokości h ponad Bolkiem, który jest na dole rakiety.Rakieta przyspiesza z przyspieszeniem g w próżni. W podobnej sytuacji znajdują się dwa obserwatorzy (Antek i Basia) na dole i górze wieży, którzy są jednorodnym polu grawitacyjnym g. (np. Na Ziemi). Alicja wysyła w równych odstępach czasu $\Delta\tau_a$ sygnały świetlne; do mierzenia czasu używa zegara, który znajduje się obok niej. W jakich odstępach czasu $\Delta\tau_B$ Bolek odbiera sygnały, jeśli mierzy czas identycznym zegarem znajdującym się na jego wysokości? Co powiedzą Antek i Basia jeżeli oni powtórzą ten eksperyment?
Ogranicz się do Mechaniki Newtonowskiej i założenia, że swiatło porusza się wszędzie z taką prędkością.

Zadanie 3.3 (3pkt.) Potencjał Efektywny Klasyczny
Energie całkowitą można zapisać w postaci, za pomocą układu biegunowego

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + V = \frac{1}{2}m(\frac{dr}{dt})^2 + V_{eff}$$

Tutaj r oznacza promień. Znajdź V_{eff} Narysuj kształt od promienia tej funkcji, jakie wnioski z tego wykresu wynikają dla orbit w problemie dwóch ciał, podpowiedź: energia jest zachowana.

[6]a dokładniej jego współczynnikami
[7]tu domyśle dowolnym