Złożona natura płaszczyzny euklidesowej - zadania

Maciej Zwoliński

Rozwiązania zadań proszę przesyłać za pośrednictwem strony warsztatów. Pytania proszę kierować na adres maciej.a.zwolinski@gmail.com. W temacie proszę wpisać "[WWW21]".

1 Funkcje - podstawy

1.Znajdź funkcję $f(n) : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ taką, że dla każdego $q \in \mathbb{Z}$ istnieje $n \in \mathbb{N}$ takie, że$f(n) = q$.
Przez $\mathbb{N}$ oznaczamy zbiór liczb naturalnych, a przez $\mathbb{Z}$ zbiór liczb całkowitych.

2 Operacje na płaszczyźnie

Niech A, B i P będą punktami na płaszczyźnie o współrzędnych, w układzie kartezjańskim, równych odpowiednio $[x_A, y_A]$, $[x_B, y_B]$ i $[x_P, y_P]$.

1. Wyznacz punkt (współrzędne) Q będący wynikiem działania przesunięcia równoległego $A \to B$ na punkt P.

2. Wyznacz punkt Q będący wynikiem działania jednokładności o skali r i środku w środku układu współrzędnych na punkt P.

Oznaczając przez $J_q(r_q) \triangleright p$ punkt będący wynikiem działania jednokładności o środku w punkcie q i skali r_q na punkt p, wyznacz współrzędne :

3. $J_A(r_A) \triangleright P$ Podpowiedź: można stworzyć tymczasowy układ o środku w punkcie q.

4. Oznaczając $J_A(r_A) \circ J_B(r_B) \triangleright P$ jako $J_A(r_A) \triangleright \Big(J_B(r_B) \triangleright P\Big)$, wyznacz

$J_A(r_A) \circ J_B(r_B) \triangleright P$ i $J_B(r_B) \circ J_A(r_A) \triangleright P$

oraz różnicę powyższych współrzędnych. Spróbuj wyrazić wynik przy użyciu najprostszych operacji.

3 Łukowa miara kąta

Oblicz łukowe miary kątów równych kolejno: $30°, 45°, 60°, 90°, 120°$ i $180°$.

4 Wielomiany

1. Wykaż, nie licząc pozostałych pierwiastków, że 2 jest pierwiastkiem wielomianu $x^4 - 5x^2 + 4$.

2.Znajdź pierwiastki wielomianu o równaniu $x^3 + 7x^2 + 7x - 15$.

5 Granice

1. Wykaż, że jeśli ciąg $a_n = 2^{-n}$, a S_n oznacza sumę n pierwszych wyrazów ciągu a_n, to ciąg S_n ma granicę dla $n \to \infty$.

2. Wykorzystując twierdzenie o 3 ciągach, znacz granicę

$$lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x}$$

3. Wykaż, że poniższy ciąg ma granicę

$$e_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$