Dyskretne układy dynamiczne i chaos - zadania kwalifikacyjne

Michalina Horecka

25 kwietnia 2021

Uwaga! Wszystkie odpowiedzi powinny mieć uzasadnienie. Rozwiązania bez dowodu będę oceniać niżej, jeżeli w ogóle.
Symbol $\mathbb{N}$ będzie oznaczać liczby naturalne, liczone od jedynki. Napisy $\{x_n\}_{n\in N}$, $\{x_n\}_n$ i $\{x_n\}$ oznaczają to samo.

Co to jest dyskretny układ dynamiczny?

Dyskretnym układem dynamicznym nazwiemy każdą składaną ze sobą wiele razy funkcję $f : X \to X$, gdzie X jest dowolnym zbiorem. Składanie (iterację) funkcji oznaczamy

$$f^1 = f,\ f^2 = f \circ f,\ f^n = f \circ \ldots \circ f\ -\ \text{złożone n razy.}$$

Będziemy więc badać zachowanie ciągu $\{f^n\}_{n\in N}$.

Na przykład weźmy funkcję $f(x) = x^2$. Mamy

$$f^1(x) = x^2,\ f^2(x) = (x^2)^2 = x^4,\ f^3(x) = x^8, \ldots,\ f^n(x) = x^{2^n}, \ldots$$

Dla różnych punktów $x \in X$ interesujący nas ciąg może się różnie zachowywać. W przypadku $f(x) = x^2$ dla $x = 1$ jest stale równy 1, dla $x = -2$ jest nieograniczony, dla $x = \frac{1}{2}$ zbiega do zera. Dla danego punktu $x \in X$ ciąg $\{f^n(x)\}_{n\in N}$ nazywamy *orbitą* x.

Zadanie 1 *Określ dla jakich wartości x ciąg $\{f^n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$ jest zbieżny (do czego?) a dla jakich rozbieżny, jeśli f jest równe:*

1. x^3,
2. 1,
3. $\sqrt{x}$,
4. $\frac{1}{2}x + 1$,
5. $\frac{1}{x} + 1$.

Układy dynamiczne są ściśle powiązane z modelowaniem różnych procesów w fizyce, biologii i innych dziedzinach.
Wyobrażmy sobie, że hodujemy bakterie. Chcielibyśmy się dowiedzieć jak w kolejnych tygodniach życia kolonii będzie się zmieniać ich liczebność. Ponieważ mamy ograniczone miejsce, jest pewna maksymalna ilość bakterii, które mogą żyć na raz w naszej hodowli. Najprostszym pomysłem jak opisać liczbę bakterii w n-tym tygodniu badania będzie równanie

$$x_n = x_{n-1} + b_{n-1} - d_{n-1}$$

gdzie x_n oznacza liczbę bakterii zaobserwowaną na początku n-tego tygodnia, b_n - liczbę bakterii narodzonych w n-tym tygodniu, a d_n - liczbę bakterii, które zmarły w n-tym tygodniu. Wartości b_{n-1} i d_{n-1} będą w jakiś sposób zależeć od x_{n-1}. Możemy zgadywać, że wyrazy ciągu $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ będą zbliżać się do maksymalnej możliwej liczby bakterii w naszym środowisku, potem spadać, być może znowu się zwiększać. Zadaniem matematyka będzie znaleźć funkcję, której iteracje przybliżają dobrze ciąg $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. W czasie warsztatów prawdopodobnie omówimy podobny przykład.

Zadanie 2 *Opisać jakiś niematematyczny problem językiem iteracji funkcji (może być nieformalnie i bez szczegółów).*

Elementy topologii

Podam tu tylko definicje dla przestrzeni metrycznych, bo raczej nie będziemy poza nie wychodzić. Prawdopodobnie przez całe warsztaty będziemy zakładać, że X, które do tej pory oznaczało dowolny zbiór, jest równe $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$ lub przestrzeni ciagów zerojedynkowych, o której zaraz coś opowiem.

Przestrzeń metryczna to zbiór X wraz z funkcją $d : X \times X \to \mathbb{R}$, która spełnia następujące warunki:

1. $d(x, x) = 0$,
2. $d(x, y) = d(y, x)$,
3. $d(x, y) \leqslant d(x, z) + d(z, y)$.

Gdzie $x, y, z \in X$.

Zadanie 3 *Udowodnić, że funkcja $g(x, y) = |x - y|$, dla $x, y \in \mathbb{R}$, jest metryką.*

Kulą otwartą o promieniu r i środku x nazwiemy zbiór wszystkich punktów odległych od x o mniej niż r.

$$K(x, r) = \{y \in X : d(x, y) < r\}$$

Analogicznie, *kulą otwartą o promieniu r i środku x* nazwiemy zbiór wszystkich punktów odległych od x o co najwyżej r.

$$K(x, r) = \{y \in X : d(x, y) \leqslant r\}$$

Powiemy, że zbiór U jest *otwarty*, jeśli dla każdego punktu $x \in U$ istnieje kula o środku w x, która zawiera się w U. Dopełnienie zbioru otwartego nazywamy zbiorem *domkniętym*. Dodatkowo zbiór pusty jest otwarty i cała przestrzeń X jest zbiorem otwartym. Rodzinę otwartych podzbiorów X nazywamy *topologią* na X.

Zadanie 4 *Określić, czy podany zbiór jest otwarty, czy jest domknięty, czy ani taki, ani taki:*

1. $\emptyset$,
2. *kula domknięta,*
3. *kula otwarta,*
4. $[0, 1)$,
5. $\{\frac{1}{n}\}_{n\in\mathbb{N}}$.

Funkcję nazywamy *ciągłą*, jeśli przeciwobraz przez tą funkcję każdego zbioru otwartego jest zbiorem otwartym. Zapoznajcie się z również z analityczną definicją ciągłości.

Rozważmy Σ - zbiór wszystkich możliwych ciągów zer i jedynek. Zdefiniujmy funkcję

$$d(\{x_n\}, \{y_n\}) = 2^{-\alpha(\{x_n\},\{y_n\})}$$

gdzie $\{x_n\}, \{y_n\} \in \Sigma$, a $\alpha(\{x_n\}, \{y_n\})$ to najmniejszy indeks, na którym te ciągi się różnią.

Zadanie 5 *Udowodnić, że powyższa funkcja jest metryką. Określić jak wyglądają w tej metryce kule otwarte i domknięte.*

Shiftem nazwiemy odwzorowanie $\sigma : \Sigma \to \Sigma$ które odrzuca pierwszy element ciągu i zmniejsza o 1 pozostałą numerację, czyli

$$\sigma(\{x_n\})_i = x_{i+1}.$$

Na przykład

$$\sigma(0, 1, 0, 1, 0, 1, \ldots) = 1, 0, 1, 0, 1, 0, \ldots$$

Iterowanie shiftu obcina kolejne elementy ciągu. Shift jest funkcją ciągłą i surjekcją.

Zadanie 6 *Czy istnieje taki ciąg zerojedynkowy* $\{x_n\}$*, że w jego orbicie* $\{\sigma^n(x)\}_n$ *znajduje się każdy inny ciąg?*

Własności dyskretnych układów dynamicznych

Powiemy, że punkt $x \in X$ jest *punktem stałym* funkcji $f : X \to X$ jeśli $f(x) = x$. Zauważmy, że wtedy $f^n(x) = x$ dla każdej liczby naturalnej n.
Punktem okresowym funkcji $f : X \to X$ nazywamy taki punkt $x \in X$, że dla pewnego n naturalnego zachodzi $f^n(x) = x$. Jeśli n jest najmniejsze takie, nazywamy je *okresem* punktu x.

Zadanie 7 *Podaj przykład funkcji, która ma punkt okresowy o okresie* 5.

Zadanie 8 *Podaj przykład funkcji, która nie ma punktów okresowych.*

Przestrzeń X ma *własność punktu stałego*, jeśli dla każdej funkcji ciągłej $f : X \to X$ istnieje $x \in X$, dla którego $f(x) = x$.

Wyobrażmy sobie, że $X = \mathbb{S}^1$ to okrąg, a f jest obrotem o kąt $\frac{\pi}{4}$. Obrót ten nie ma punktów stałych, więc okrąg nie ma własności punktu stałego.

Zadanie 9 *Udowodnij, że odcinek* $[0, 1]$ *ma własność punktu stałego.*

Zadanie 10 *Czy odcinek* $(0, 1)$ *ma własność punktu stałego?*