Zadania kwalifikacyjne
Kombinatoryka nieskończona

1 Ogłoszenia dusz... organizatorskie

Rozwiązania proszę wysyłać za pomocą udostępnionej przez organizatorów opcji na stronie warsztatów w terminie ustalonym przez organizatorów. Wszelkie pytania proszę kierować na adres:

mt394587@students.mimuw.edu.pl

z dopiskiem w temacie '[WWW] Imię nazwisko'. Robienie wszystkich zadań nie jest konieczne, ale warto zapoznać się z ich treścią i dodatkowymi komentarzami. Zadania wysłane przed terminem postaram się sprawdzić jak najszybciej, by podesłać moje uwagi i dać możliwość wysłania poprawek. Częściowe rozwiązania także będą oceniane. W razie problemów, uwag, wątpliwości, poprawek (nawet literówek) lub pytań piszcie na wyżej podanego maila. Postaram się odpowiedzieć w ciągu 48 godzin.

2 Pojęcia pierwotne, proszę nie nazywać ich 'pierwotniaki'

Podczas warsztatów będziemy zajmowali się kombinatoryką na zbiorach nieskończonych. By móc w pełni formalnie nad nimi pracować, potrzebujemy wprowadzić kilka podstawowych pojęć z zakresu teorii mnogości, by być świadomymi, czym w ogóle się zajmujemy.
Pojęciami pierwotnymi (czyli takimi, których znaczenie przyjmujemy za znane, nie definiujemy ich w żadne sposób) teorii mnogości jest zbiór (będziemy je zazwyczaj oznaczać przez wielkie litery $X, Y, Z, ...$) i relacja należenia (oznaczana małą grecką literą epsilon $\in$). Przykładowo napis $1 \in \mathbb{N}$ oznacza 'liczba jeden należy do zbioru liczb naturalnych'. Warto podkreślić, że w aksjomatyce ZFC (o której więcej za chwilę) elementy zbiorów również są zbiorami, w szczególności, we wspomnianym powyżej przykładzie, jedynka również jest zbiorem. Przez aksjomat rozumiemy twierdzenie, którego prawdziwośc przyjmujemy za z góry daną i na jej podstawie dopiero wyciągamy kolejne wnioski.

3 Aksjomatyka ZFC (nie mylić z firmą sprzedającą panierowane kurczaki)

Podczas zajęć będziemy poruszali się w obrębie aksjomatyki ZFC (Zermela-Fraenkla z aksjomatem wyboru).
Poniżej wypiszę kilka spośród aksjomatów (pełną ich listę można znaleźć w internecie lub literaturze):
1. Jeśli zbiory X i Y mają te same elementy, to $X = Y$.
2. Dla dowolnej pary elementów a, b istnieje zbiór $\{a, b\}$ zawierający dokładnie te elementy.
3. Istnieje zbiór nieskończony.
4. Dla dowolnej własności P (z ewentualnym parametrem p) i dowolnego zbioru X i parametru p istnieje zbiór $Y = \{u \in X : P(u, p)\}$ zawierający dokładnie te elementy X, które spełniają własność P z parametrem p. Innymi słowy oznacza to, że dla konkretnego zbioru X możemy wybrać jego podzbiór spełniający pewną własność (na przykład ze zbioru liczb naturalnych możemy wybrać podzbiór liczb mających własność "bycia parzystymi").
5. Dla dowolnego zbioru X istnieje zbiór potęgowy $P(X)$, czyli zbiór zawierający wszystkie podzbiory zbioru X.

Jakkolwiek czwarty z podanych aksjomatów może wydawać się sformułowany w sposób nieintuicyjny, nie chcemy dopuszczać możliwości definiowania zbiorów jedynie poprzez podanie własności jego elementów (bez zdefiniowania 'nadzbioru', w którym się znajdujemy). Jednym z powodów, przez które nie chcemy do tego dopuścić, jest **paradoks Russela**:

Zadanie 1. (2 pkt.) Udowodnij, że nie istnieje zbiór S o własności 'do S należą wszystkie zbiory, które nie należą same do siebie' ($S = \{X : X \notin X\}$).

Zadanie 2. (2 pkt.) Udowodnij, że z paradoksu Russela i przedstawionych wcześniej aksjomatów wynika, że nie istnieje zbiór wszystkich zbiorów.

Zadanie 3. (2 pkt.) Udowodnij, że z przedstawionych aksjomatów wynika, że istnieje zbiór pusty.

Na tym kończę swój opis aksjomatyki ZFC. Nie chciałbym poświęcać jej szczególnie dużo uwagi, bardziej chodziło mi o samą świadomość jej istnienia. Zachęcam jednakowoż do zapoznania się z pełną ich listą i próby zrozumienia, co poszczególne aksjomaty oznaczają.

4 Nienaturalna definicja liczb naturalnych

Zbiór liczb naturalnych, z którego będziemy wielokrotnie korzystali podczas warsztatów, jest tożsamy, co do własności, z powszechnie rozumianym pojęciem liczb naturalnych (przy założeniu, że do liczb naturalnych zaliczmy zero), ale poznanie przedstawionej poniżej definicji pomoże nam lepiej zrozumieć pojęcia wprowadzone na zajęciach dotyczące liczb porządkowych i kardynalnych.

Dla liczb naturalnych definiujemy funkcję następnika $S : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ (rozumianą jako "$S(n) = n + 1$") w następujący sposób:

$$S(x) = x \cup \{x\}$$

Oznaczmy równocześnie $0 := \emptyset$. Otrzymujemy w ten sposób formalnie zdefiniowany zbiór liczb naturalnych i tak na przykład:
$1 := S(0) = 0 \cup \{0\} = \emptyset \cup \{\emptyset\} = \{\emptyset\} = \{0\}$
$2 := S(1) = 1 \cup \{1\} = \{\emptyset\} \cup \{\{\emptyset\}\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}\} = \{0, 1\}$
$3 := S(2) = 2 \cup \{2\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}\} \cup \{\{\emptyset, \{\emptyset\}\}\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\} = \{0, 1, 2\}$

Zadanie 4. (1 pkt.) Używając jedynie symboli $\}$, $\{$, $\emptyset$ zapisz liczbę "6".

5 Porządek, niekoniecznie taki, ze w pokoju jest czysto

Z aksjomatów 2, 4 i 5 możemy wywnioskować, że dla dowolnego zbioru możemy zdefiniować zbiór jego dwuelementowych podzbiorów (nazywanych fachowo 'parami'). Korzystając z nich możemy w sposób formalny zdefiniować **pary uporządkowane** w następujący sposób:

$$(a, b) = \{a, \{a, b\}\}$$

Intuicja stojąca za pojęciem pary uporządkowanej jest taka, że dla dowolnych elementów $a, b, c, d \in X$ zachodzi $(a, b) = (c, d)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $a = c$ i $b = d$. W szczególności elementy a, b nie muszą być różne.
Korzystając z pojęcia par uporządkowanych definiujemy pojęcie **relacji** jako pewnego podzbioru zbioru par uporządkowanych. Możemy zdefiniować na przykład relację podzielności liczb naturalnych R w następujący sposób:

$$(a, b) \in R \iff \exists k \in \mathbb{N} : \ b = k \cdot a$$

Niekiedy stosuje się w powyższej również zapis $a|b$ lub (ogólnie dla relacji) aRb.

Szczególnym przykładem relacji jest funkcja, czyli relacja R spełniająca $\forall x \in X\ \exists y \in Y : (x,y) \in R$ oraz $\forall (a,b),(c,d) \in R : a = c \Rightarrow b = d$. Pierwszy napis oznacza, że funkcja przyporządkowuje każdemu elementowi zbioru X jakiś element zbioru Y, zaś drugi - że przyporządkowuje co najwyżej jeden taki element. Warto zauważyć, że ukradkiem wprowadziłem tutaj założenie, że możemy zdefiniować relację na iloczynie kartezjańskim zbiorów $X \times Y$. Dalej, poza pojęciem funkcji, będziemy zajmowali się jedynie relacjami, w których oba elementy należą do tego samego zbioru.

Relację $R \subseteq X \times X$ spełniającą następujące własności:

zwrotność

$$\forall x \in X:\ (x,x) \in R$$

przechodniość

$$\forall x,y,z \in X:\ (x,y) \in R \wedge (y,z) \in R \Rightarrow (x,z) \in R$$

antysymetryczność

$$\forall x,y \in X : (x,y) \in R \wedge (y,x) \in R \Rightarrow x = y$$

nazywamy **(częściowym) porządkiem** i często oznaczamy symbolem " $\leq$ " (na przykład $(x,y) \in R$ oznaczamy jako $x \leq y$).

Relację $R' \subseteq X \times X$ zdefiniowaną:

$$\forall x,y \in X : (x,y) \in R' \iff (x,y) \in R \wedge x \neq y$$

nazywamy ostrym porządkiem i często oznaczamy symbolem "<".

Relację częściowego porządku $R \subseteq X \times X$, w której dodatkowo zachodzi

$$\forall x,y \in X : (x,y) \in R \vee (y,x) \in R$$

nazywamy **liniowym porządkiem**.

Zadanie 5. (2 pkt.) Uzasadnij, że relacja $\in$ w zbiorze $\mathbb{N}$ jest liniowym porządkiem.

Zadanie 6. (3 pkt.) Sprawdź, dla jakich zbiorów X relacja zawierania $\subseteq$ jest:
-częściowym porządkiem,
-liniowym porządkiem
na zbiorze $\mathcal{P}(X)$ - zbiorze potęgowym zbioru X (czyli zbiorze zawierającym wszystkie podzbiory zbioru X).

Dla dowolnego porządku $\leq$ na zbiorze X i podzbioru $A \subseteq X$ definiujemy **element najmniejszy** podzbioru A jako element $a \in A$ spełniający $\forall x \in A :\ a \leq x$. Nie twierdzimy przy tym, że każdy zbiór posiada element najmniejszy.
Relację liniowego porządku na zbiorze X nazywamy **dobrym porządkiem**, jeśli każdy niepusty podzbiór zbioru X posiada element najmniejszy.

Zadanie 7. (4 pkt.) Czy dobrym porządkiem jest:
-$\leq$ na zbiorze $\mathbb{Z}$
-$\leq$ na zbiorze $\mathbb{N}$
-$\leq$ na zbiorze $[0,1] \subseteq \mathbb{R}$
-$\subseteq$ na zbiorze $\mathcal{P}(\{a,b,c,d,e\})$?

Zadanie 8. (2 pkt.) Udowodnij, że zbiór X z relacją $\leq$ jest dobrym porządkiem wtedy i tylko wtedy, gdy w X nie istnieje nieskończony ciąg malejący.

Zadanie 9. (2 pkt.) Udowodnij, że jeśli X z relacją $\leq$ jest dobrze uporządkowany ($\leq$ jest dobrym porządkiem na Z) i $F : X \to X$ jest funkcją rosnącą (inaczej mówiąc: zachowującą porządek, czyli $x < y \Rightarrow F(x) < F(y)$), to $\forall x \in X : \; F(x) \geq x$.

6 Równoliczność, czyli droga do szaleństwa

O funkcji $f : X \to Y$ mówimy, że jest **różnowartościowa**, jeśli $\forall a, b \in X : \; f(a) = f(b) \Rightarrow a = b$.
O funkcji $f : X \to Y$ mówimy, że jest **na**, jeśli $\forall a \in Y \; \exists b \in B : \; f(b) = a$.
O funkcji $f : X \to Y$ mówimy, że jest **bijekcją**, jeśli jest różnowartościowa i na.
O zbiorach X, Y mówimy, ze są równoliczne (ozn. $|X| = |Y|$), jeśli istnieje bijekcja z X w Y.
Jeśli istnieje funkcja $f : X \to Y$, która jest różnowartościowa, to mówimy, że zbiór X jest mocy nie większej niż zbiór Y (ozn. $|X| \leq |Y|$).
Jeśli istnieje funkcja $f : X \to Y$, która jest na, to mówimy, że zbiór X jest mocy nie mniejszej niż zbiór Y (ozn. $|X| \geq |Y|$). Dla dowolnych zbiorów A, B zachodzą następujące dwa twierdzenia:
-$|A| \leq |B| \wedge |A| \geq |B| \Rightarrow |A| = |B|$
-prawo trychotomii: $|A| < |B| \vee |A| > |B| \vee |A| = |B|$ (to twierdzenie jest równoważne aksjomatowi wyboru).

Zadanie 10. (1 pkt.) Udowodnić, że zbiory $\mathbb{N}$ i $\mathbb{Z}$ są równoliczne.

Zadanie 11. (2 pkt.) Udowodnić, że zbiory $\mathbb{N}$ i $\mathbb{Q}$ są równoliczne.

Zadanie 12. (2 pkt.) Udowodnić, że zbiory $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ i $2^{\mathbb{N}}$ (czyli zbiór funkcji ze zbioru liczb naturalnych w $\{0, 1\}$) są równoliczne.

Zadanie 13. (dodatkowe) Udowodnić, że zbiory $\mathbb{N}$ i $2^{\mathbb{N}}$ NIE są równoliczne.

Zadanie 14. (dodatkowe - trudne) Udowodnić podane na końcu sekcji 6. twierdzenia.