Zadania na WWW17

Janczar Knurek

AD. 2021

Wstęp

Niniejszy dokument zawiera zadania i przydatne informacje związane z warsztatami „Dyskretny urok obliczeń kwantowych”. Wypełnione zadania proszę wysyłać poprzez formularz na stronie warsztatów. Wszelkie pytania i wątpliwości co do treści zadań, a także prośby o poradę proszę kierować na adres podany na stronie warsztatów.

Zasady

Obliczenia i rozumowania są istotną częścią zadania - ich obecność jest konieczna aby rozwiązanie zostało ocenione jako poprawne. Im więcej podpunktów rozwiązanych - tym lepiej, proszę jednak się nie przerażać jeśli któregoś z podpunktów nie będzie potrafiło się rozwiązań, lub okaże się niejasny - służę wtedy radą i wyjaśnieniem.

Rozwiązania można wysyłać w dowolnym formacie, byle czytelnym - w wypadku zdjęć/skanów pisma odręcznego proszę o krytyczną ocenę swoich zdolności kaligraficznych, pozwoli nam to uniknąć niezręcznych sytuacji w których wzajemne zrozumienie będzie wymagało wymiany wielu maili.

Liczby zespolone

Liczby zespolone okazują się mieć fundamentalne znaczenie dla mechaniki kwantowej. Ta sekcja ma na celu zapoznanie czytelnika z podstawowymi ich własnościami.

Definicja 1 (Liczby zespolone)**.** Liczbą zespoloną nazywamy parę liczb rzeczywistych (a, b). Zbiór liczb zespolonych oznaczamy przez $\mathbb{C}$. Na zbiorze liczb zespolonych wprowadzamy działania

- Dodawania jako $(a_1, b_1) + (a_2, b_2) = (a_1 + a_2, b_1 + b_2)$.
- Mnożenia jako $(a_1, b_1) \times (a_2, b_2) = (a_1a_2 - b_1b_2, a_1b_2 + a_2b_1)$.
- Sprzężenia jako $(a, b)^* = (a, -b)$

Dla liczb zespolonych definiujemy:

- Część rzeczywistą $\Re\left((a, b)\right) = a$.
- Część urojoną $\Im\left((a, b)\right) = b$.
- Normę $|(a, b)| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Dla uproszczenia zapisu możemy wprowadzić następującą konwencję

$$a + bi := (a, b)$$

Zauważmy, że liczba $0 + 1i$ ma następującą własność

$$(0 + 1i)^2 = -1 + 0i = -1$$

Możemy więc myśleć o $i = (0, 1)$ jako o $\sqrt{(-1)}$ gdyż spełnia ono równość $i^2 = -1$. Co więcej, mnożenie liczb zespolonych zachowuje się jak mnożenie klasycznych wyrażeń arytmetycznych, przy czym i^2 zamieniamy na -1. Dla pełności

$$(a_1, b_1) \times (a_2, b_2) = (a_1 + b_1 i)(a_2 + b_2 i) = a_1a_2 + a_1b_2i + a_2b_1i + b_1b_2i^2 = (a_1a_2 - b_1b_2) + (a_1b_2 + a_2b_1)i =$$

$$= (a_1a_2 - b_1b_2, a_1b_2 + a_2b_1)$$

Zadanie 1. Proste własności Wszystkie liczby w zadaniach są zespolone, chyba że powiedziano inaczej

1. $zz^* = |z|^2$
2. Znaleźć z^{-1} takie że $zz^{-1} = 1$. (odwrotność)
3. Policzyć $\sum_{n=1}^{50} \left(\frac{i}{2}\right)^n$
4. $(z_1 z_2)^* = z_1^* z_2^*$

Definicja 2 (Okrąg jednostkowy)**.** Zbiór wszystkich liczb zespolonych o normie jeden (tzn takich $z \in \mathbb{C}$ że $|z| = 1$) oznaczamy przez $\mathbb{S}$ i nazywamy okręgiem jednostkowym.

Zadanie 2. Norma liczby zespolonej

1. $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$
2. $|z_1 + z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|$
3. $|z^{-1}| = |z|^{-1}$

Zauważmy że z podpunktów 1 i 3 tego zadania wynika, że zbiór $\mathbb{S}$ jest zamknięty na mnożenie i odwracanie.

Interpretacja geometryczna

Liczby zespolone możemy utożsamić z płaszczyzną $\mathbb{R}^2$. Przy takim utożsamieniu zbiór $\mathbb{S}$ który zdefiniowaliśmy poprzednio, rzeczywiście jest okręgiem jednostkowym, tj. zbiorem punktów odległych o 1 od środka układu współrzędnych.

Każdy punkt okręgu jednostkowego możemy przedstawić niemalże jednoznacznie (bo z dokładnością do $2\pi n$, $n \in \mathbb{N}$) w postaci

$$(\cos\theta, \sin\theta)$$

Każdą liczbę $z \in \mathbb{S}$ możemy więc przedstawić w postaci

$$z = \cos\theta + i\sin\theta$$

Zaś dowolną liczbę $z \in \mathbb{C}$ jako

$$z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta)$$

Kąt θ nazywamy argumentem liczby z i oznaczamy go przez $\arg z$.

Warto zwrócić więc uwagę na następujący fakt - każdą liczbę zespoloną opisujemy dwiema liczbami rzeczywistymi. Każdą liczbę zespoloną o module jeden - jedną liczbą rzeczywistą.

Zadanie 3. Kręciołki na płaszczyźnie

1. Niech $r \in \mathbb{R}$. Wtedy $\arg(rz) = r\arg(z)$.

2. $\arg(z_1 z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2)$ - Proszę podać interpretacje geometryczną tego faktu, jest kluczowa!

3. Korzystając z poprzedniego, rozwiązać równanie $z^3 = 1$ i podać jego interpretacje geometryczną.

4. Rozpisać $|z+1| = |2z+1|$ jako równanie dwóch zmiennych rzeczywistych i naszkicować na płaszczyźnie zbiór rozwiązań.

Algebra Liniowa

Drugim kluczowym dla obliczeń kwantowych składnikiem jest algebra liniowa. Nie ma sensu żebym się tu rozpisywał i odsyłam do lepszych od siebie - do świetnej serii filmów autorstwa 3blue1brown na ten temat. Link znajduje się na stronie warsztatów.

Od tego miejsca będę zakładał już elementarną znajomość algebry liniowej nad liczbami rzeczywistymi. Naszym celem jednak jest uściślenie, co zmienia się jeśli będziemy rozważać wektory i macierze zespolone.

Dla macierzy M będziemy oznaczać przez M_{nm} element n-tego wiersza m-tej kolumny.

Definicja 3 (Zespolony iloczyn skalarny)**.** Iloczynem skalarnym wektorów $u, v \in \mathbb{C}^n$ nazywamy liczbę

$$\langle u|v\rangle = \sum_{i=1}^{n} u_i^* v_i$$

Zadanie 4. Własności iloczynu skalarnego

1. $\langle u|v\rangle = \langle v|u\rangle^*$

2. Dla dowolnego wektora u mamy $\langle u|u\rangle \in \mathbb{R}$, $\langle u|u\rangle \geqslant 0$ gdzie równość zachodzi wtw. $u = 0$.

Definicja 4 (Sprzężenie hermitowskie, macierz hermitowska)**.** Dla macierzy $M \in M(n \times m)$ definiujemy jej sprzężenie hermitowskie $M^\dagger \in M(m \times n)$ jako

$$\left(M^\dagger\right)_{ij} = (M_{ji})^*$$

Czyli bierzemy sprzężenia zespolone elementów macierzy oraz transponujemy - odbijamy względem przekątnej. Macierz M nazywamy hermitowską jeśli zachodzi równość

$$M^\dagger = M$$

Definicja 5 (Macierz unitarna)**.** Macierz $U \in M(n \times n)$ nazywamy unitarną, jeśli zachodzi równość

$$U^\dagger U = UU^\dagger = I$$

Definicja 6 (Norma wektora)**.** Niech $u \in \mathbb{C}$. Definiujemy normę wektora u jako

$$|u| = \sqrt{\langle u|u\rangle}$$

Zadanie 5. Macierze

1. Podać przykład (nie identyczność) macierzy która jest jednocześnie unitarna i hermitowska

2. Pokazać, że $(MN)^\dagger = N^\dagger M^\dagger$

3. Wskazać przykład macierzy hermitowskich M, N których iloczyn nie jest hermitowski.

4. Pokazać, że iloczyn macierzy unitarnych jest unitarny.

5. Udowodnić

6. (*) opisać wszystkie macierze 2×2 które są jednocześnie unitarne i hermitowskie.

Zadanie 6. Własności $\mathbb{C}^2$

Wiemy, że każdy wektor w $\mathbb{C}^2$ można opisać czterema parametrami rzeczywistymi. Ile parametrów rzeczywistych potrzeba aby opisać:

1. Zbiór wektorów z $\mathbb{C}^2$ o normie jednostkowej.

2. Zbiór wektorów o normie jednostkowej których pierwsza współrzędna jest rzeczywista.

Dla lepszego zrozumienia tego zadania można przeanalizować dwa przykłady:

1. Sfera potrzebuje trzech parametrów do opisania - szerokości i długości geograficznej

2. Zbiór trójek rzeczywistych sumujących się do jedynki potrzebuje dwóch parametrów, każda taka trójka jest postaci $(a, b, 1 - a - b)$ dla jakiś $a, b \in \mathbb{R}$.