Zadania kwalifikacyjne

1 Wstęp

Rozwiązania proszę wysyłać poprzez stronę warsztatów do 16 maja. Forma jest zupełnie dowolna, byleby czytelna. Nie trzeba robić wszystkich zadań. Warto wysyłać nawet częściowe rozwiązania, ponieważ będę je brał pod uwagę przy ocenianiu. W razie jakichkolwiek wątpliwości, problemów itd. - piszcie na maila podanego na stronie warsztatów.

2 Analiza

0. Znajdź w dowolym źródle definicje granicy ciągu oraz sumy szeregu.

1. Udowodnij bezpośrednio z definicji granicy, że $\lim_{n\to\infty} \frac{\sin n}{n} = 0$.

2. Udowodnij bezpośrednio z definicji sumy szeregu, że $\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$, gdy $|q| < 1$.

3. W dawnych matematycznych czasach (XVII - XVIII wiek) nie istniała jeszcze ścisła terminologia i aksjomatyka. Wieloma pojęciami posługiwano się wyłącznie "intuicyjnie", co prowadziło do wielu paradoksów. Oto przykład zagadnienia, które w tych czasach było prawdziwym, poważnym problemem matematycznym. Rozważmy sumę nieskończoną $s = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n$. Z jednej strony mamy

$$s = (1-1) + (1-1) + (1-1) + ... = 0 + 0 + 0 + ... = 0$$

z drugiej strony

$$s = 1 + (-1+1) + (-1+1) + (-1+1) + ... = 1 + 0 + 0 + 0 + ... = 1$$

z trzeciej strony

$$1 - s = 1 - (1 - 1 + 1 - ...) = 1 - 1 + 1 - ... = s \text{ skąd } s = \frac{1}{2}$$

Wytłumacz źródło owego paradoksu i wyjaśnij, czemu we współczesnej matematyce już on nie występuje.

Niech $A \subseteq \mathbb{R}$ będzie dowolnym podzbiorem. **Ograniczeniem górnym** zbioru A nazywamy dowolną liczbę $x \in \mathbb{R}$ która jest niemniejsza od każdego elementu A. Za ograniczenie górne dowolnego zbioru przyjmujemy także ∞. Najmniejsze ograniczenie górne zbioru A nazywamy jego **kresem górnym** lub **supremum** i oznaczamy $\sup A$. Analogicznie definiujemy ograniczenie dolne oraz kres dolny lub infimum jako największe ograniczenie dolne. Przyjmujemy przy tym, że

$\sup \emptyset = -\infty$ oraz $\inf \emptyset = \infty$. Supremum i infimum zawsze istnieją, ale nie będę tego dowodził (często przyjmuje się to za aksjomat zbioru liczb rzeczywistych).

4. Wyznacz kresy następujących zbiorów:
a)
$$\left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}_+\right\}$$
b)
$$\left\{\frac{11}{k} - \frac{3}{m} : k, m \in \mathbb{N}_+\right\}$$
gdzie $\mathbb{N}_+$ oznacza zbiór liczb naturalnych dodatnich.

3 Teoria mnogości

Jest jasne, że jeżeli chcemy mówić o mierzeniu rzeczy, to musimy nauczyć się w jakiś sposób mówić o zbiorach nieskończonych. Każda sensowna figura lub bryła jest przecież nieskończonym zbiorem punktów. Narzędzi do tego celu dostarcza nam dziedzina matematyki nazywana teorią mnogości. Nam będzie potrzebne tylko jedno z tych narzędzi, a mianowicie pojęcie zbiorów przeliczalnych.
Funkcję $f : A \to B$ nazywamy **iniekcją**, jeżeli jest różnowartościowa.
Funkcję $f : A \to B$ nazywamy **suriekcją**, jeżeli każdy element B jest obrazem pewnego elementu A.
Funkcję $f : A \to B$ nazywamy **bijekcją**, jeżeli jest iniekcją i suriekcją.
Intuicyjnie bijekcja jest więc połączeniem w pary elementów dwóch zbiorów. Dwa zbiory A i B nazywamy **równolicznymi**, jeżeli istnieje bijekcja $f : A \to B$. Zbiór nazywamy **przeliczalnym**, jeżeli jest równoliczny z pewnym pozdzbiorem zbioru $\mathbb{N}$ liczb naturalnych. Można pokazać, że zbiór przeliczalny jest skończony lub równoliczny z $\mathbb{N}$.

0. Przeczytaj następujące trzy artykuły:
`http://www.deltami.edu.pl/temat/matematyka/teoria_mnogosci/2018/12/28/Hotel_Hilberta/`
`http://www.deltami.edu.pl/temat/matematyka/teoria_mnogosci/2019/04/29/Jak_policzyc_nieskonczone/`
`http://www.deltami.edu.pl/temat/matematyka/teoria_mnogosci/2019/05/26/Nie_kazda_jest_taka_sama_/`

1. Które z poniższych zbiorów są przeliczalne? Odpowiedź uzasadnij.
a) zbiór wielomianów w współczynnikach całkowitych
b) zbiór liczb niewymiernych
c) zbiór ciągów (x_n) liczb rzeczywistych takich, że $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$
d) zbiór ciągów (x_n) liczb całkowitych takich, że $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$

2. Udowodnij, że suma przeliczalnie wielu zbiorów przeliczalnych jest zbiorem przeliczalnym.

4 Zadania z gwiadką

Na koniec kilka zadań "z gwiazdką", które są już bardzo bezpośrednio związane z tym, czym będziemy się zajmować na zajęciach. Na pewno nie będą one koniecznie do kwalifikacji, ale gorąco zachęcam do zapoznania się z nimi.

1. Udowodnij, że okrąg bez punktu można podzielić na dwie rozłączne części, z których za pomocą samych obrotów można złożyć cały okrąg.

2. Niech U będzie przeliczalną rodziną otwartych przedziałów zbioru liczb rzeczywistych $\mathbb{R}$, taką, że każda liczba wymierna znajduje się w pewnym przedziale należącym do U. Niech Ω będzie zbiorem wszystkim takich rodzin. Oczywiście Ω jest niepusta, bo na przykład $\{\mathbb{R}\} \in \Omega, \{(-\infty, \sqrt{2}), (\sqrt{2}, \infty)\} \in \Omega$. Wyznaczyć wartość

$$\inf \left\{ \sum_{I \in U} |I| : U \in \Omega \right\},$$

gdzie $|I|$ oznacza długość przedziału I.