Zadania kwalifikacyjne na WWW18
„ ”

21 maja 2022

1 Słowo Wstępu

Zanim zaczniesz rozwiązywać zadania warto żebyś zapoznał się z wymaganiami i materiałami[1] edukacyjnymi „przed warsztatami”. Deadline jest taki jak na stronie WWW16.

Zadania proszę przysyłać w formacie PDF (sugerowany latex) lub skanów, wrzuconych do PDF'a lub odpowiednio **ponumerowanymi plikami** na stronę WWW.

W razie konkretnych pytań/wątpliwości co do zadań/pytań natury ogólnej/ogólnej chęci rozmowy można do mnie pisać. Email: ag9@onet.eu Polecam też wysyłać jak najwcześniej swoje rozwiązania, można by wtedy poprawić.

Jako że planuje na tych zajęciach mówić o fizyce, potrzebujemy wyrobić sobie odpowiedniego języka do mówienia o niej. Tym językiem jest matematyka i właśnie na niej skupię się w tych zadaniach kwalifikacyjnych.

2 Zadania

Jeżeli czytelnik po raz pierwszy spotyka się pojęciem „pochodnej” lub „całki” należy najpierw zapoznać się ze skryptem lub obejrzeć „Essence of Calculus” na yt klik. Następnie warto by żeby czytelnik jeszcze przerobił parę przykładów chociażby te klik, a dla zaznajomionych z tematem polecam przerobić te parę z tych dla przypomnienia klik zadanie 7.

2.1 Rozgrzewkowe zadania

Są to ćwiczenia wprowadzające do reszty zadań, więc zrób je w pierwszej kolejności...

Ćwiczenie 1 (1pkt.)
Oblicz pochodną funkcji:

$$f(x) = x^2 \sin(x)$$

$$g(x) = \cos(x) \sin(x)$$

Ćwiczenie 2 (1 pkt.) Oblicz

$$\int \sin(x) \cos(x) dx$$

$$\int_0^\pi \sin(x) dx$$

[1] pojawią się

Ćwiczenie 3 (0,5 pkt.) Podaj jedną dowolną fizyczną interpretacje pochodnej po czasie funkcji.
Ćwiczenie 4 (0,5 pkt.) Czy miałeś wcześniej, przed warsztatami do-czynienia z pochodną i całką?
Ćwiczenie 5 Oblicz sprzężenie zespolone liczby: (1pkt.)
a) 1
b) i
c) $42 + 13i$
d) $\alpha + \beta i$
Ćwiczenie 6 Oblicz Sprężenie Hermitowskie macierzy:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & i \\ i & 2 \end{bmatrix}^{\dagger}$$

2.2 Właściwe zadania

Zadanie 1 (1 pkt.)
Pokaż, że

$$\int_0^{2\pi} \frac{\sin x}{((1 + a\cos(x))^2} dx = 0,$$

gdzie $1 > a > 0$.

Wskazówka do zadania 1: Co można szczególnego powiedzieć o funkcji podcałkowej, zobacz jak jej wygląda wykres, dla przykładowych wartości a.

Wskazówka do zadań 2, 3, 4 i 6.
Siła F_x działająca na ciało, w kierunku x będące w polu o energii potencjalnej U, zależnością

$$F_x = -\frac{\partial U}{\partial x}$$

W szczególności V może być funkcją wielu zmiennych.
W zadaniach 2, 3, 4, 5 i 6 rozważamy jednowymiarowy ruch na osi x.

Zadanie 2 (1pkt.)
Rozwiąż równania ruchu[2] dla cząstki o masie m w polu o potencjale (1 pkt.)

$$V = \frac{kx^2}{2}$$

Podaj przykład układu fizycznego opisywanego, przez te równanie. (1pkt.)

Zadanie 4. (2pkt.) Pokaż, że równanie Eulera-Lagrange spełniają równania Newtona[3], dla uproszczenia załóż że ruch jest jednowymiarowy.
Wskazówka: Równanie E-L w jednym wymiarze:

$$\frac{d}{dt}\frac{dL}{d\dot{x}} - \frac{dL}{dx} = 0,$$

gdzie $\dot{x}$ oznacza pochodna po czasie z x. L jest tzw. langrażjanem.

[2] tj. znajdź zależność $x(t)$
[3] $F = ma$

Zadanie 5 (2 pkt.)
Rozważmy ruch cząstki o masie m w pewnym polu, które jest zachowawcze. Rozważamy ruch wzdłuż osi OX.
a)Co to znaczy, że siła jest zachowawcza(pole jest zachowawcze)? (1pkt.)
b)Pokaż że równania ruchu, są rozwiązaniem takiego równania całkowego: (2pkt.)

$$\int \sqrt{\frac{m}{2}} \frac{dx}{\sqrt{E - mV(x)}} = \int dt,$$

przy czym całki są w odpowiednich graniach, jakie to granice? Czym jest E i $V(x)$, w szczególności czy $V(x)$ istnieje ?
Wsk. Z odpowiedzi na pytanie a) wynika b).
Wsk. Mamy jakaś funkcje różniczkowalna $x(t)$, to wtedy można zrobić przejścia

$$(x'(t))^2 = (\frac{dx}{dt})^2 = A \Rightarrow \int dx = \int dt\sqrt{A},$$

gdzie A liczba.
Zadanie 6 (5pkt)
Mając Lagranżjan $\mathcal{L}$ jako funkcję funkcji $\phi(t, x, y, z)$ rzeczywistej $\phi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ i jej pochodnych. Wyprowadź równania Kleina-Gordona (K-G) z $\mathcal{L}$ określonego wzorem, dla

$$\mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi, ..) = \frac{1}{2} \sum_{\mu=0,1,2,3} \sum_{\nu=0,1,2,3} \partial_\mu \phi \partial^\nu \phi - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 \tag{1}$$

Jakiemu sławnemu z relatywistki, równanie K-G „odpowiada" jeżeli dodam że energia to jest „jakoś" powiązana z pochodną po czasie a pęd gradientem po składowych przestrzennych? Słowo „jakoś" oznacza tutaj związek wynikających z zasad mechanik kwantowej.
Podpowiedzi:

1. ∂_μ oznacza pochodną względem μ-tewego kierunku – (t,x,y,z) odpowiadają indeksom 0,1,2,3, na przykład $\partial_0 = \frac{\partial}{\partial t}$
2. Ustaliłem metrykę na $(+, -, -, -)$ Co oznacza że

   $$\partial^0 = \partial_0$$

   ale

   $$\partial^1 = -\partial_1,$$

   oraz że dla $\mu \neq \nu$ mamy

   $$\partial_\mu \phi \partial^\nu \phi = 0$$

   .
3. Równania E-L w takim przypadku są równe:

   $$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = \sum_\mu \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi},$$

   co czytamy z lewej pochodna $\mathcal{L}$ po ϕ, jest równa suma po wszystkich kierunkach z pochodnej po μtym kierunku po pochodnej $\mathcal{L}$ względem $\frac{\partial \phi}{\partial x_\mu}$.

Zadanie 7
(4pkt) Wyprowadź opisujące brachistochrony z równań E-L. (jakieś równanie uwikłane lub jawne określające współrzędne brachistochrony)