

Matematyka dyskretna

Zadania kwalifikacyjne

Krzysztof Pęczek

Wstęp

Forma rozwiązania może być wszelaka dopóki jest czytelna i wysłana przez stronę WWW.

Nie wszystkie zadania trzeba zrobić ale gorąco zachęcam do tego. Można ich rozwiązywanie potraktować jako dobre przygotowanie do warsztatów.

Wszelkie wnioski, skargi, pytania, wątpliwości można kierować na email: krpeczek@student.agh.edu.pl

Definicje do zadań

Permutacje

Permutacja zbioru X jest to bijekcja ze zbioru X na samego siebie. Często utożsamiana z ustawieniem elementów zbioru w pewnej kolejności. Liczba permutacji zbioru n -elementowego to $n!$ Gdzie:

$$n! = (n) \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$

Kombinacje bez powtórzeń

Kombinacja bez powtórzeń to dowolny podzbiór zbioru skończonego. Dla n -elementowego zbioru istnieje $\binom{n}{k}$ k -elementowych podzbiorów. Gdzie:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$$

Wariacje bez powtórzeń

Wariacja bez powtórzeń to dowolny ciąg elementów dowolnego podzbioru zbioru skończonego. Wariacji n -elementowego zbioru długości k jest

$$\binom{n}{k} \cdot k! = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Można zauważyć, że liczba wariacji bez powtórzeń wynika z tego ile istnieje k -elementowych kombinacji bez powtórzeń i na ile sposobów takie kombinacje możemy ułożyć

Wariacje z powtórzeniami

Wariacja z powtórzeniami to dowolny ciąg elementów jakiegoś zbioru gdzie wyrazy ciągu mogą się powtarzać. Liczba wariacji (długości k) n -elementowego zbioru z powtórzeniami to:

$$n^k$$

Zadania

Seria 0 [każde po 1pkt]

Policz pochodną funkcji:

1. $f(x) = x^7 + x^5 + x^3 + x$

2. $f(x) = \frac{1}{1-x}$

Seria 1 [każde po 2pkt]

1. Ustawić elementy zbioru $\{1, 2, 3, \dots, n\}$ tak aby 1 i 2 były obok siebie
2. Ile jest takich liczb 4-cyfrowych, w których liczby się nie powtarzają
3. Pomalować n różnych liczb k kolorami
4. Ile jest liczb pięciocyfrowych o parzystym iloczynie cyfr

Seria 2 [każde po 3pkt]

1. Na ile sposobów można postawić n rozróżnialnych osób przy okrągłym stole z n miejscami.
2. Do konkursu z matematyki dyskretnej przystąpiło 32 uczestników. W każdym kolejnym etapie odpada ich dokładnie połowa. Ile jest możliwych przebiegów takiego konkursu
3. Ile jest ciągów binarnych o a zerach i b jedynek
4. Ile jest sposobów na podzielenie $2n$ osób na pary

Seria 3 [każde po 4pkt]

1. Na ile sposobów można rozdać po 13 kart (ze zbioru 52) 4 graczom, dla których kolejność kart nie ma znaczenia
2. Ile różnych słów można ułożyć z liter M,A,T,E,M,A,T,Y,K,A
3. Ile jest takich permutacji zbioru $\{1, 2, \dots, 2n\}$ takich że żadne dwie liczby parzyste nie są sąsiednie
4. Ile jest dzielników:
 - (a) 10^{10}
 - (b) $10!$
5. Na ile sposobów można z n osób wybrać komitet, a z komitetu zarząd, jeżeli zarówno komitet, jak i zarząd mogą liczyć od 0 do n osób.
6. Ile jest punktów przecięcia n prostych z których dokładnie k jest równoległych a żadne trzy nie przecinają się w jednym punkcie⁴⁷
7. Ile jest całkowitoliczbowych dodatnich potęg liczby 10, które dzielą 1000!