Zadania kwalifikacyjne

1 Wstęp

Zadania proszę wysyłać przez stronę warsztatów w terminie podanym na stronie warsztatów (na ten moment do 6 czerwca). Oczywiście nie trzeba robić wszystkich zadań (niektóre są dość trudne). Celem jest, abyście poprzez myślenie nad nimi zapoznali się dokładnie z pojęciami, które będą potrzebne na warsztatach. To, czy w każdym przypadku uda wam się doprowadzić rozumowanie do końca nie jest już takie ważne. Z tego też powodu chciałbym, żebyście, jeżeli nie uda wam się jakiegoś zadania zrobić w całości, wysyłali także częściowe rozwiązania, pomysły itp. Wszelkie uwagi co do zadań, prośby o wskazówki, prośby o dodatkowy materiały i tym podobne rozterki życiowe można kierować na m.zimny@students.mimuw.edu.pl

2 Definicje

Niech X będzie dowolnym zbiorem. Funkcję $d : X \times X \to [0, \infty)$ nazywamy **metryką** na X, jeżeli spełnia one następujące warunki:

a) $d(x, y) = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x = y$,

b) $d(x, y) = d(y, x)$ dla dowolnych $x, y \in X$,

c) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ dla dowolnych $x, y, z \in X$.

Parę (X, d) nazywamy w takim wypadku **przestrzenią metryczną**.
Jeżeli dodatkowo funkcja d spełnia mocniejszą wersję warunku c, a mianowicie

c') $d(x, y) \leq \max(d(x, z), d(z, y))$ dla dowolnych $x, y, z \in X$,

to nazywamy ją **ultrametryką**.

Mówimy, że ciąg (x_n) elementów przestrzeni X jest **zbieżny** do x, jeżeli

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n, x) = 0.$$

Mówimy, że podzbiór $A \subseteq X$ jest **gęsty** w X, jeżeli dla każdego $x \in X$ istnieje ciąg (a_n) elementów A, który jest zbieżny do x.

Niech (X, d), (Y, d') będą przestrzeniami metrycznymi i niech $U \subseteq X$. Mówimy, że funkcja $f : U \to Y$ jest **ciągła w punkcie** $x_0 \in U$, jeżeli dla każdego ciągu (x_n) zbieżnego do x_0, ciąg $f(x_n)$ jest zbieżny do $f(x_0)$. Równoważnie, jeśli

$$\forall \epsilon > 0\ \exists \delta > 0 \quad d(x_n, x_0) < \delta \Rightarrow d'(f(x_n), f(x_0)) < \epsilon.$$

Jeżeli funkcja jest ciągła w każdym punkcie swojej dziedziny, to nazywamy ją po prostu **ciągłą**.

Klasycznym przykładem przestrzeni metrycznej jest $(\mathbb{R}^2, d_e)$, gdzie d_e jest tzw. metryką euklidesową daną wzorem

$$d_e((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}.$$

3 Zadania

1. Udowodnij, że poniższe pary są przestrzeniami metrycznymi.

   (a) $(\mathbb{R}^2, d_m)$, gdzie d_m dane jest wzorem

   $$d_m((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|.$$

   (b) $(C([0,1]), d)$, gdzie $C([0,1])$ jest zbiorem funkcji ciągłych na przedziale $[0,1]$ o wartościach rzeczywistych, a d dane jest wzorem

   $$d(f, g) = \max_{x \in [0,1]} |f(x) - g(x)|.$$

   (c) $(\mathbb{Q}, d_p)$, gdzie p jest liczbą pierwszą, d_p dane jest wzorem

   $$d_p(x, y) = \begin{cases} 0 & x = y \\ p^{-ord_p(x-y)} & x \neq y \end{cases},$$

   gdzie ord_p jest funkcją zdefiniowaną następująco. Jeżeli $x \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, to $ord_p(x)$ jest największą potęgą p dzielącą x, np. $ord_2(3) = 0$, $ord_5(250) = 3$. Funkcję tę rozszerzamy na $\mathbb{Q} \setminus \{0\}$ wzorem

   $$ord_p\left(\frac{x}{y}\right) = ord_p(x) - ord_p(y).$$

2. (a) Udowodnij, że metryka z podpunktu c powyższego zadania jest ultrametryką.

   (b) Pokaż, że w przestrzeni z ultrametryką każdy trójkąt jest równoramienny, tzn. dla dowolnych trzech punktów $x, y, z \in X$ zachodzi $d(x, y) = d(x, z)$ lub $d(y, x) = d(y, z)$, lub $d(z, x) = d(z, y)$.

   (c) Pokaż, że w przestrzeni z ultrametryką każdy punkt we wnętrzu koła jest jego środkiem, tzn. jeżeli $a \in X$, $r \in (0, \infty)$ i zdefiniujemy koło (otwarte) o środku a i promieniu r

   $$B(a, r) = \{x \in X : d(x, a) < r\},$$

   to $B(a, r) = B(b, r)$ dla dowolnego $b \in B(a, r)$.

3. Pokaż, że funkcja ciągła o wartościach rzeczywistych określona na gęstym podzbiorze przestrzeni metrycznej, może zostać w jedyny sposób rozszerzona na całą przestrzeń z zachowaniem ciągłości.

4. Pokaż, że ciąg elementów $\mathbb{R}^2$ jest zbieżny do jakiejś granicy w metryce d_m wtedy i tylko wtedy, gdy jest zbieżny do tej samej granicy w metryce euklidesowej d_e.

5. Podaj przykład podzbioru $\mathbb{Q}$, który jest gęsty w metryce d_p, ale nie jest gęsty w zwykłej metryce $d(x, y) = |x - y|$.