Zadania kwalifikacyjne

1 Wstęp

Zadania proszę wysyłać przez stronę warsztatów w terminie podanym na stronie warsztatów (na ten moment do 30 maja). Oczywiście nie trzeba robić wszystkich zadań (niektóre są dość trudne). Celem jest, abyście poprzez myślenie nad nimi zapoznali się dokładnie z pojęciami, które będą potrzebne na warsztatach. To, czy w każdym przypadku uda wam się doprowadzić rozumowanie do końca nie jest już takie ważne. Z tego też powodu chciałbym, żebyście, jeżeli nie uda wam się jakiegoś zadania zrobić w całości, wysyłali także częściowe rozwiązania, pomysły itp. Wszelkie uwagi co do zadań, prośby o wskazówki, prośby o dodatkowy materiały i tym podobne rozterki życiowe można kierować na m.zimny@students.mimuw.edu.pl

2 Definicje

Niech X będzie dowolnym zbiorem. Funkcję $d : X \times X \to [0, \infty)$ nazywamy **metryką** na X, jeżeli spełnia one następujące warunki:

a) $d(x, y) = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x = y$,

b) $d(x, y) = d(y, x)$ dla dowolnych $x, y \in X$,

c) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ dla dowolnych $x, y, z \in X$.

Parę (X, d) nazywamy w takim wypadku **przestrzenią metryczną**.
Jeżeli dodatkowo funkcja d spełnia mocniejszą wersję warunku c, a mianowicie

c') $d(x, y) \leq \max(d(x, z), d(z, y))$ dla dowolnych $x, y, z \in X$,

to nazywamy ją **ultrametryką**.

Mówimy, że ciąg (x_n) elementów przestrzeni X jest **zbieżny** do x, jeżeli

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n, x) = 0.$$

Mówimy, że podzbiór $A \subseteq X$ jest **gęsty** w X, jeżeli dla każdego $x \in X$ istnieje ciąg (a_n) elementów A, który jest zbieżny do x.

Niech (X, d), (Y, d') będą przestrzeniami metrycznymi i niech $U \subseteq X$. Mówimy, że funkcja $f : U \to Y$ jest **ciągła w punkcie** $x_0 \in U$, jeżeli dla każdego ciągu (x_n) zbieżnego do x_0, ciąg $f(x_n)$ jest zbieżny do $f(x_0)$. Równoważnie, jeśli

$$\forall \epsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \quad d(x_n, x_0) < \delta \Rightarrow d'(f(x_n), f(x_0)) < \epsilon.$$

Jeżeli funkcja jest ciągła w każdym punkcie swojej dziedziny, to nazywamy ją po prostu **ciągłą**.

Klasycznym przykładem przestrzeni metrycznej jest $(\mathbb{R}^2, d_e)$, gdzie d_e jest tzw. metryką euklidesową daną wzorem

$$d_e((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}.$$

3 Zadania

1. Udowodnij, że poniższe pary są przestrzeniami metrycznymi.

   (a) $(\mathbb{R}^2, d_m)$, gdzie d_m dane jest wzorem
   $$d_m((x_1,y_1),(x_2,y_2)) = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|.$$

   (b) $(C([0,1]), d)$, gdzie $C([0,1])$ jest zbiorem funkcji ciągłych na przedziale $[0,1]$ o wartościach rzeczywistych, a d dane jest wzorem
   $$d(f,g) = \max_{x\in[0,1]} |f(x) - g(x)|.$$

   (c) $(\mathbb{Q}, d_p)$, gdzie p jest liczbą pierwszą, d_p dane jest wzorem
   $$d_p(x,y) = \begin{cases} 0 & x = y \\ p^{-ord_p(x-y)} & x \neq y \end{cases},$$
   gdzie ord_p jest funkcją zdefiniowaną następująco. Jeżeli $x \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, to $ord_p(x)$ jest największą potęgą p dzielącą x, np. $ord_2(3) = 0$, $ord_5(250) = 3$. Funkcję tę rozszerzamy na $\mathbb{Q} \setminus \{0\}$ wzorem
   $$ord_p\left(\frac{x}{y}\right) = ord_p(x) - ord_p(y).$$

2. (a) Udowodnij, że metryka z podpunktu c powyższego zadania jest ultrametryką.

   (b) Pokaż, że w przestrzeni z ultrametryką każdy trójkąt jest równoramienny, tzn. dla dowolnych trzech punktów $x, y, z \in X$ zachodzi $d(x,y) = d(x,z)$ lub $d(y,x) = d(y,z)$, lub $d(z,x) = d(z,y)$.

   (c) Pokaż, że w przestrzeni z ultrametryką każdy punkt we wnętrzu koła jest jego środkiem, tzn. jeżeli $a \in X$, $r \in (0,\infty)$ i zdefiniujemy koło (otwarte) o środku a i promieniu r
   $$B(a,r) = \{x \in X : d(x,a) < r\},$$
   to $B(a,r) = B(b,r)$ dla dowolnego $b \in B(a,r)$.

3. Pokaż, że funkcja ciągła określona na gęstym podzbiorze przestrzeni metrycznej może zostać w jedyny sposób rozszerzona na całą przestrzeń z zachowaniem ciągłości.

4. Pokaż, że ciąg elementów $\mathbb{R}^2$ jest zbieżny do jakiejś granicy w metryce d_m wtedy i tylko wtedy, gdy jest zbieżny do tej samej granicy w metryce euklidesowej d_e.

5. Podaj przykład podzbioru $\mathbb{Q}$, który jest gęsty w metryce d_p, ale nie jest gęsty w zwykłej metryce $d(x,y) = |x - y|$.