POSETY@WWW2022 ZADANIA KWALIFIKACYJNE

MARCIN BRIAŃSKI

Słowem wstępu

Celem tych zadań jest wprowadzenie podstawowych pojęć jakie będą używane podczas warsztatów, jak i spróbowanie twoich sił z paroma zadankami. Śmiało wysyłaj częściowe rozwiązania, nie musisz rozwiązać wszystkich zadań, część z nich może być wyzwaniem. Wszelkie pytania wysyłaj na email `marcin.brianski@doctoral.uj.edu.pl`. Rozwiązania wyślij za pośrednictwem strony warsztatów.

Co to jest porządek

Niech X będzie dowolnym zbiorem (będziemy się skupiać na skończonych zbiorach). Relację $\leqslant \subseteq X \times X$ nazwiemy *częściowym porządkiem na* X (a parę $(X, \leqslant)$ nazwiemy *posetem* od **p**artially **o**rdered **set**) gdy spełnione są następujące warunki

(PI) dla każdego $x \in X$ mamy $x \leqslant x$,
(PII) dla każdych $x, y \in X$, jeżeli $x \leqslant y$ oraz $y \leqslant x$ to koniecznie $x = y$,
(PIII) dla każdych $x, y, z \in X$, jeżeli $x \leqslant y$ oraz $y \leqslant z$ to też $x \leqslant z$.

Warunek (PI) nazywany jest *zwrotnością*, (PII) to *antysymetria*, a (PIII) to *przechodniość*. Gdy relacja jest jasna z kontekstu będziemy się odnosić do X jako posetu.

Przykład 1. Prawdopodobnie najlepiej znanym Ci przykładem porządku jest zbiór liczb rzeczywistych $\mathbb{R}$ wraz z standardową relacją $\leqslant$, gdzie $x \leqslant y$ wtedy i tylko wtedy gdy $y - x$ jest nieujemne. Jest to porządek *liniowy* — to znaczy dla dowolnych dwóch liczb $x, y \in \mathbb{R}$ zachodzi co najmniej jedno z $x \leqslant y$ albo $y \leqslant x$.

Przykład 2. Trochę ciekawszym przykładem zbioru z porządkiem są liczby naturalne $\mathbb{N}$ wraz z relacją $a \leqslant b$ wtedy i tylko wtedy gdy a dzieli b. Zweryfikuj w głowie warunki (PI), (PII), (PIII) dla tego posetu.

Przykład 3. Niech $\mathcal{B}_n$ będzie zbiorem wszystkich podzbiorów $\{1, 2, \ldots, n\}$. Poset $(\mathcal{B}_n, \subseteq)$ nazywamy *kratą Boolowską rozmiaru* n (czyli A jest mniejsze od B gdy A jest zawarte w B).

Możemy teraz szybko wprowadzić parę prostych pojęć: *porównywalności*, *łańcucha* oraz *antyłańcucha*. Parę elementów x, y w posecie $(X, \leqslant)$ nazwiemy *porównywalną* gdy zachodzi $x \leqslant y$ albo $y \leqslant x$. Zauważ, że warunek (PI) gwarantuje nam że para x, x jest porównywalna. *Łańcuchem* nazwiemy dowolny podzbiór $C \subseteq X$ o tej własności, że dowolna para elementów $c, d \in C$ jest porównywalna. Dualnie, *antyłańcuchem* nazwiemy dowolny podzbiór $A \subseteq X$ taki, że żadna para różnych elementów z A nie jest porównywalna.

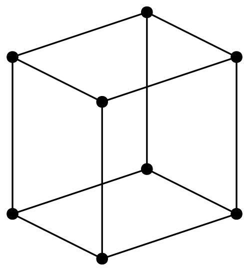
Przykład 4. W posecie z Przykładu 2 zbiór liczb pierwszych stanowi przykład nieskończonego antyłańcucha. Natomiast potęgi dwójki stanowią przykład nieskończonego łańcucha.

Przykład 5. W posecie $\mathcal{B}_n$ zbiór wszystkich podzbiorów rozmiaru k gdzie $k \in \{0, 1, 2, \ldots, n\}$ stanowi antyłańcuch. Jak wyglądają łańcuchy w $\mathcal{B}_n$?

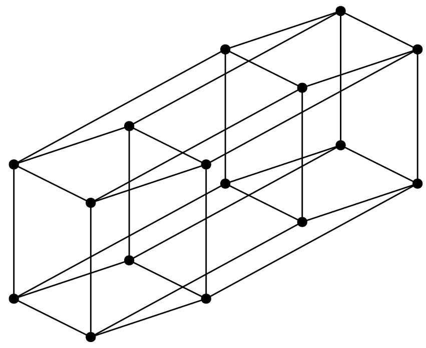
Aby ułatwić sobie wyobrażenie abstrakcyjnych posetów, wprowadzimy pojęcie *diagramu Hassego*. W tym celu potrzebujemy jeszcze jednego pojęcia — *pokrywania*. Powiemy że x jest pokryty przez y gdy $x < y$ (co naturalnie oznacza $x \leqslant y$ oraz $x \neq y$), oraz dla dowolnego $z \in X$ takiego że $x \leqslant z \leqslant y$ mamy $z = x$ lub $z = y$. Intuicyjnie oznacza to, że nie ma żadnych elementów ściśle pomiędzy x a y.

W diagramie Hassego będziemy rysować elementy X jako punkty na płaszczyźnie, a relację będziemy reprezentować poprzez krzywe monotoniczne łączące elementy X. Dokładniej, jeżeli y pokrywa x, to w diagramie Hassego rysujemy krzywą monotoniczną od punktu reprezentującego x do punktu reprezentującego y. Odzyskanie relacji z diagramu Hassego jest bardzo proste — element x jest mniejszy od y jeżeli jesteśmy w stanie zaczynając w x przejść po diagramie idąc cały czas "w górę", to jest po monotonicznych krawędziach naszego diagramu.

Przykład 6. Oto są diagramy Hassego posetów $\mathcal{B}_3$ oraz $\mathcal{B}_4$. Spróbuj przypisać wierzchołkom diagramu odpowiadające im podzbiory $\{1, 2, 3\}$ oraz $\{1, 2, 3, 4\}$.



$\mathcal{B}_3$



$\mathcal{B}_4$

Zadania

We wszystkich zadaniach wszystkie rozważane porządki są zdefiniowane na zbiorze skończonym, chyba że w treści jest napisane inaczej.

Zadanie 1. Niech $P = (X, \leqslant)$ oraz $P' = (X, \leqslant')$ będą posetami na tym samym zbiorze. Przez *przecięcie* posetów P oraz P' będziemy rozumieć poset $P \cap P' = (X, \leqslant'')$, gdzie $x \leqslant'' y$ wtedy i tylko wtedy gdy $x \leqslant y$ oraz $x \leqslant' y$ (równoważnie, w języku znaczków, $\leqslant'' = \leqslant \cap \leqslant'$). Pokaż, że $P \cap P'$ jest posetem.

Zadanie 2. Niech $P = (X, \leqslant)$ będzie posetem, oraz niech h będzie maksymalnym rozmiarem łańcucha w P (parametr ten nazywamy *wysokością posetu*). Pokaż, że P jest sumą h antyłańcuchów (czyli istnieją antyłańcuchy $A_1, A_2, \ldots, A_h$ takie, że $X = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_h$).

Zadanie 3. Ile krawędzi zawiera diagram Hassego posetu $\mathcal{B}_n$?

Zadanie 4. Niech $P = (X, \leqslant)$ oraz $P' = (X, \leqslant')$ będą posetami. Powiemy, że P' jest *rozszerzeniem* P gdy dla każdej pary $x, y \in X$ takiej, że $x \leqslant y$ mamy również $x \leqslant' y$ (w znaczkach $\leqslant \subseteq \leqslant'$). Pokaż, że każdy poset posiada rozszerzenie do pewnego porządku liniowego (definicja jest w Przykładzie 1).

Zadanie 5. Niech $P = (X, \leqslant)$ będzie posetem. Niech $L_1, L_2, \ldots, L_t$ będą wszystkimi porządkami liniowymi na X które są rozszerzeniem P. Pokaż, że $P = L_1 \cap L_2 \cap \cdots \cap L_t$.

Zadanie 6. Jaka jest maksymalna długość łańcucha w $\mathcal{B}_n$? Jaka jest maksymalna długość antyłańcucha w $\mathcal{B}_n$?

Zadanie 7. Dzięki Zadaniu 5 możemy zdefiniować *wymiar* posetu P jako minimalną liczbę d taką, że istnieje d liniowych rozszerzeń P — $L_1, L_2, \ldots, L_d$ — o tej własności, że $P = L_1 \cap L_2 \cap \cdots \cap L_d$. Ile wynosi wymiar $\mathcal{B}_n$?

Zadanie 8. Zaprojektuj algorytm który dostając na wejściu poset P wyznacza maksymalną długość łańcucha w P. Postaraj się to zrobić w najlepszej złożoności jakiej potrafisz, najlepiej wielomianowej.

Zadanie 9 (*)**.** Zaprojektuj algorytm który dostając na wejściu poset P wyznacza maksymalną długość antyłańcucha w P. Postaraj się to zrobić w najlepszej złożoności jakiej potrafisz, najlepiej wielomianowej.

Na koniec, trochę nieskończoności

Zadanie 10. Niech $P = (X, \leqslant)$ będzie posetem na nieskończonym zbiorze X. Pokaż, że P zawiera albo nieskończony łańcuch albo nieskończony antyłańcuch.