Zadania kwalifikacyjne

8 maja 2022

1 Wstęp

Rozwiązania proszę wysyłać przez stronę WWW, innych rozwiązań nie będę mógł ocenić. Rozwiązanie powinno być czytelne i precyzyjne, będzie miało to wpływ na punktację, preferowany jest format pdf. Robienie wszystkich zadań nie będzie konieczne, ale nie mogę na razie chyba zagwarantować jaki będzie próg.

2 Teoria grup

Definicja 1 ***Grupą*** *nazywamy zbiór* **G** *wyposażony w działanie dwuargumentowe nazywane mnożeniem (a czasem dodawaniem)* $(x, y) \to x \odot y$*, które spełnia aksjomaty:*

- *Łączność* $\forall x, y, z \in G \quad (x \odot y) \odot z = x \odot (y \odot z)$.
- *Istnieje element neutralny* e*, tż* $\forall x \in G \ x \odot e = e \odot x = x$.
- *Dla każdego elementu* g *istnieje element (obustronnie) odwrotny oznaczany* g^{-1} *spełniający:* $g \odot g^{-1} = g^{-1} \odot g = e$.

Definicja 2 *Grupę* G *nazywamy* ***przemienną*** *(abelową) gdy*

$$\forall a, b \in G \ a \odot b = b \odot a.$$

Definicja 3 ***Podgrupą*** H *grupy* G*, nazywamy podzbiór* $H \subset G$ *taki, że:*

- $x, y \in H \implies x \odot y \in H$,
- $x \in H \implies x^{-1} \in H$,
- $e \in H$.

Stwierdzenie 1 *Przecięcie rodziny podgrup grupy* G *(zbioru składającego z podgrup) jest podgrupą.*

Definicja 4 *Dla podzbioru $X \subset G$, przecięcie wszystkich podgrup G zawierających X, nazywamy (pod)**grupą generowaną** przez X i oznaczamy $< X >$.*

Definicja 5 *Mówimy, że grupa G jest **cykliczna**, gdy jest generowana przez pojedyńczy element.*

3 Algebra liniowa

Weźmy płaszczynę rzeczywistą $\mathbb{R}^2$. Wyróżnimy na niej parę wektorów; $e_1 = (1, 0)$ oraz $e_2 = (0, 1)$. Spełniają one następującą własności:

- dowolny wektor $v \in \mathbb{R}^2$ może być wyrażony jako kombinacja liniowa $v = ae_1 + be_2$, gdzie $a, b \in \mathbb{R}$,
- jeśli $ae_1 + b_2 = 0$ wtedy $a = b = 0$.

Pierwszą własność nazywamy rozpinaniem przestrzeni $\mathbb{R}^2$ przez układ $\{e_1, e_2\}$, drugą liniową niezależnością. Razem powyższe własności mówią że nasz układ jest bazą.

Definicja 6 ***Endomorfizmem liniowym*** $\mathbb{R}^2$ *nazywamy przekształcenie $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ spełniające*

- $f(ax + by) = af(x) + bf(y)$ *dla $a, b \in \mathbb{R}$ oraz $x, y \in \mathbb{R}^2$.*

Mając wybraną bazę $\{e_1, e_2\}$ takie przekształcenie można przedstawić za pomocą macierzy 2×2. Bierzemy $f(e_1) = ae_1 + be_2$, $f(e_2) = ce_1 + de_2$ (współczynniki są jednoznacznie wyznaczone, dlaczego?).

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d, \end{pmatrix}$$

Składanie takich przekształceń odpowiada mnożeniu macierzy (jeśli umiesz mnożyć macierze to zastanów się skąd się bierze ta odpowiedność?, jeśli nie wywnioskuj stąd jak się mnoży macierze).

Ze wszystkich macierzy możemy wybrać te które odpowiadają odwracalnym endomorfizmom (czyli takim, które posiadają odwrotność co do składania i jest ona endomorfizmem liniowym). Te macierze stanowią grupę (dlaczego?) i nazywamy ją pełną grupą liniową $GL(2, \mathbb{R})$.

Definicja 7 ***Wartością własną*** *endomorfizmu f, nazywamy $\lambda \in \mathbb{R}$, takie że istnieje wektor $0 \neq v \in \mathbb{R}$, taki że $f(v) = \lambda v$.*

Zadanie 1 (40 pkt) *Zadanie z teorii grup i algebry liniowej*

- *Przeprowadź analogiczną konstrukcję $GL(2, \mathbb{C})$, zamieniając wszędzie liczby rzeczywiste na zespolone i odpowiadając na pytania w nawiasach* ***(4 pkt)***.
- *Jaka macierz jest elementem neutralnym, jaki endomorfizm reprezentuje i czy odpowiedź zależy od wyboru bazy? (**2 pkt**)*
- *Uzasadnij dlaczego z postaci macierzowej endomorfizmu można odzyskać wartości własne endomorfizmu. (**4 pkt**)*
- *Jakie są wartości własne macierzy diagonalnych? (**1 pkt**)*
- *Spróbuj opisać analogicznie $GL(1, \mathbb{R})$ oraz $GL(1, \mathbb{C})$ (**4 pkt**)*
- *Znajdź wszystkie skończone abelowe podgrupy $GL(2, \mathbb{C})$, takie że poza elementem neutralnym żaden element nie ma wartości własnej równej 1. (**25 pkt**)*

4 Podstawy teorii mnogości

Definicja 8 ***Relacją*** *$\sim$ na zbiorze A nazywamy dowolny podzbiór iloczynu kartezjańskiego $A \times A$. Mówimy że para (a, b) jest w relacji, co zapisujemy $a \sim b$, gdy $(a, b) \in \sim$*

Definicja 9 ***Relacją równoważności*** *na A nazywamy relację, która jest zwrotna symetryczna i przechodnia.*
Formalnie:

- *Zwrotna $\forall a \in A\ a \sim a$,*
- *Symetryczna $\forall a, b \in A\ a \sim b \implies b \sim a$,*
- *Przechodnia $a \sim b$ i $b \sim c$ to $a \sim c$.*

Relacja równoważności to fundamentalny koncept matematyki, jest to też zupełnie naturalne pojęcie, którym posługujemy się na co dzień. Należy o niej myśleć w następującym sensie, wzorcem relacji równoważności jest równość (sprawdź), fakt że dwa elementy są w relacji traktujemy jak osłabioną równość, równość pod względem pewnej cechy. Prostym przykładem jest kolor włosów, możemy powiedzieć, że jeśli dwie osoby mają ten sam kolor włosów to są w relacji. Wyznacza nam to relację równoważności, każdy ma taki kolor włosów jaki ma :). Jeśli jedna osoba ma taki sam kolor jak druga to i odwrotnie (symetria), przechodniość też jest spełniona.

Często myślimy bardziej abstrakcyjnie np. o wszystkich osobach o włosach koloru blond jako o blondynach, tym samym utożsamiamy ze sobą elementy będące w relacji. Dla wybranego elementu, zbiór elementów będących z nim w relacji nazywamy klasą abstrakcji. Dla wybranej klasy abstrakcji dowolny jej element nazywamy reprezentantem klasy. Zbiór klas abstrakcji danej relacji $\sim$ nazywamy zbiorem ilorazowym i zapisujemy $A/\sim$.

Zadanie 2 (10 pkt) *Zadanie z relacji równoważności.*
Rozważmy $GL(2, k)$ gdzie k to $\mathbb{R}$ lub $\mathbb{C}$. $GL(2, k)$ zawiera podgrupę T złożoną z macierzy postaci

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

dla $0 \neq \lambda \in k$.
Zadajemy następującą relację równoważności, dwa elementy M, N są w relacji jeśli $MN^{-1} \in T$.

- *Sprawdź, że jest to rzeczywiście relacja równoważności.* ***(5 pkt)***
- *Rozważ zbiór ilorazowy $GL(2, k)/T$, znajdź dwuargumentowe działanie pochodzące od mnożenia w $GL(2, k)$ czyniące z tego zbioru grupę.* ***(5 pkt)***