

# Zadania kwalifikacyjne

## 1 Wstęp

Zadania proszę wysyłać przez stronę warsztatów w terminie podanym na stronie warsztatów (na ten moment do 6 czerwca). Zadania wymagają trochę wiedzy na temat logiki i teorii mnogości. Na stronie warsztatów podałem linki do przydatnych materiałów. Oczywiście nie trzeba robić wszystkich zadań (niektóre są dość trudne). Celem jest, abyście poprzez myślenie nad nimi zapoznali się dokładnie z pojęciami, które będą potrzebne na warsztatach. To, czy w każdym przypadku uda wam się doprowadzić rozumowanie do końca nie jest już takie ważne. Z tego też powodu chciałbym, żebyście, jeżeli nie uda wam się jakiegoś zadania zrobić w całości, wysyłali też częściowe rozwiązania, pomysły itp. Z wszelkimi pytaniami, wątpliwościami co do treści zadań itp. można pisać do mnie na [m.zimny@students.mimuw.edu.pl](mailto:m.zimny@students.mimuw.edu.pl)

## 2 Zadania

1. W klasycznym rachunku zdań wyróżniamy jeden spójnik jednoargumentowy: negację ( $\neg$ ) oraz cztery spójniki dwuargumentowe: koniunkcję ( $\wedge$ ), alternatywę ( $\vee$ ), implikację ( $\Rightarrow$ ) oraz równoważność ( $\Leftrightarrow$ ). Niektóre z tych spójników można zdefiniować za pomocą innych, np. formuła

$$(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$$

jest logicznie równoważna  $p \Leftrightarrow q$ , przedstawia więc definicję równoważności za pomocą koniunkcji i implikacji.

- (a) Pokaż, że wszystkie klasyczne spójniki można zdefiniować używając jedynie koniunkcji i negacji.
  - (b) Pokaż, że wszystkie klasyczne spójniki można zdefiniować używając jedynie implikacji i negacji.
  - (c) Niech  $|$  będzie spójnikiem dwuargumentowym (nazywanym czasami *NAND* lub kreską Scheffera) zdefiniowanym jako negacja koniunkcji. Pokaż, że wszystkie klasyczne spójniki można zdefiniować używając jedynie *NAND*.
  - (d) Pokaż, że nie da się zdefiniować implikacji używając jedynie koniunkcji i alternatywy.
2. Udowodnij, że formuły  $((p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow r)$  oraz  $(p \Leftrightarrow (q \Leftrightarrow r))$  są logicznie równoważne, ale zarazem nie są logicznie równoważne formule  $(p \Leftrightarrow q) \wedge (q \Leftrightarrow r)$ .
  3. W tym zadaniu naszą strukturą (cokolwiek to jest) jest  $(\mathbb{N}, \cdot)$ , czyli liczby naturalne (przyjmujemy, że  $0 \in \mathbb{N}$ ) wraz z dwuargumentowym działaniem mnożenia. Możemy budować formuły logiczne za pomocą dowolnej liczby zmiennych, spójników logicznych, kwantyfikatorów, nawiasów, mnożenia oraz równości i niczego poza tym. Każda zmienna pod kwantyfikatorem przebiega domyślnie zbiór  $\mathbb{N}$  i nie wolno tego zmieniać. Tak więc np. formuła

$$\forall x \exists y (x \cdot y = z)$$

spełnia nasze warunki, a formuła

$$\forall x \exists y \in \{0, 1, 2\} \quad (x = 3 \cdot z + y)$$

nie spełnia ich, ponieważ ograniczyliśmy zakres jednej zmiennej i użyliśmy dwóch zakazanych symboli: 3 i +.

Możemy stworzyć formułę spełniającą nasze reguły, która wyznacza zbiór kwadratów liczb naturalnych, mianowicie formuła  $\phi(x)$  dana wzorem

$$\phi(x) = \exists y \quad (x = y \cdot y)$$

jest spełniona wtedy i tylko wtedy, gdy  $x$  jest kwadratem liczby naturalnej.

- (a) Zdefiniuj w podobny sposób zbiór  $\{1\}$ .
- (b) Zdefiniuj w podobny sposób zbiór liczb pierwszych.
- (c) Pokaż, że nie da się w ten sposób zdefiniować zbioru liczb parzystych.

4. Czy istnieje zbiór  $A$  taki, że  $|\mathcal{P}(A)| = |\mathbb{N}|$ ?

5. Dane są zbiory

$$X = \{f \in \{0, 1\}^{\mathbb{Z}} : \exists k \in \mathbb{Z} \forall l \leq k \quad f(l) = 0\},$$

$$Y = \{f \in \{0, 1\}^{\mathbb{Z}} : \exists k \in \mathbb{Z} \forall l \geq k \quad f(l) = 1\}.$$

- (a) Wskaż bijekcję ze zbioru  $X$  na zbiór  $Y$ .
- (b) Udowodnij, że zbiory  $X$  i  $Y$  są mocy continuum.
- (c) Znajdź moc zbioru  $X \cap Y$ .