Zadania kwalifikacyjne

1 Wstęp

Zadania proszę wysyłać przez stronę warsztatów w terminie podanym na stronie warsztatów (na ten moment do 30 maja). Zadania wymagają trochę wiedzy na temat logiki i teorii mnogości. Na stronie warsztatów podałem linki do przydatnych materiałów. Oczywiście nie trzeba robić wszystkich zadań (niektóre są dość trudne). Celem jest, abyście poprzez myślenie nad nimi zapoznali się dokładnie z pojęciami, które będą potrzebne na warsztatach. To, czy w każdym przypadku uda wam się doprowadzić rozumowanie do końca nie jest już takie ważne. Z tego też powodu chciałbym, żebyście, jeżeli nie uda wam się jakiegoś zadania zrobić w całości, wysyłali też częściowe rozwiązania, pomysły itp. Z wszelkimi pytaniami, wątpliwościami co do treści zadań itp. można pisać do mnie na m.zimny@students.mimuw.edu.pl

2 Zadania

1. W klasycznym rachunku zdań wyróżniamy jeden spójnik jednoargumentowy: negację ($\neg$) oraz cztery spójniki dwuargumentowe: koniunkcję ($\wedge$), alternatywę ($\vee$), implikację ($\Rightarrow$) oraz równoważność ($\Leftrightarrow$). Niektóre z tych spójników można zdefiniować za pomocą innych, np. formuła

$$(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$$

jest logicznie równoważna $p \Leftrightarrow q$, przedstawia więc definicję równoważności za pomocą koniunki i implikacji.

   (a) Pokaż, że wszystkie klasyczne spójniki można zdefiniować używając jedynie koniunkcji i negacji.

   (b) Pokaż, że wszystkie klasyczne spójniki można zdefiniować używając jedynie implikacji i negacji.

   (c) Niech $|$ będzie spójnikiem dwuargumentowych (nazywanym czasami $NAND$ lub kreską Scheffera) zdefiniowanym jako negacja koniunkcji. Pokaż, że wszystkie klasyczne spójniki można zdefiniować używając jedynie $NAND$.

   (d) Pokaż, że nie da się zdefiniować implikacji używając jedynie koniunkcji i alternatywy.

2. Udowodnij, że formuły $((p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow r)$ oraz $(p \Leftrightarrow (q \Leftrightarrow r))$ są logicznie równoważne, ale zarazem nie są logicznie równoważne formule $(p \Leftrightarrow q) \wedge (q \Leftrightarrow r)$.

3. W tym zadaniu naszą strukturą (cokolwiek to jest) jest $(\mathbb{N}, \cdot)$, czyli liczby naturalne (przyjmujemy, że $0 \in \mathbb{N}$) wraz z dwuargumentowym działaniem mnożenia. Możemy budować formuły logiczne za pomocą dowolnej liczby zmiennych, spójników logicznych, kwantyfikatorów, nawiasów, mnożenia oraz równości i niczego poza tym. Każda zmienna pod kwantyfikatorem przebiego domyślnie zbiór $\mathbb{N}$ i nie wolno tego zmieniać. Tak więc np. formuła

$$\forall x \exists y \ \ (x \cdot y = z)$$

spełnia nasze warunki, a formuła

$$\forall x \exists y \in \{0,1,2\} \;\; (x = 3 \cdot z + y)$$

nie spełnia ich, ponieważ ograniczeliśmy zakres jednej zmiennej i użyliśmy dwóch zakazanych symboli: 3 i $+$.
Możemy stworzyć formułę spełniającą nasze reguły, która wyznacza zbiór kwadratów liczb naturalnych, mianowicie formuła $\phi(x)$ dana wzorem

$$\phi(x) = \exists y \;\; (x = y \cdot y)$$

jest spełniona wtedy i tylko wtedy, gdy x jest kwadratem liczby naturalnej.

(a) Zdefiniuj w podobny sposób zbiór $\{1\}$.

(b) Zdefiniuj w podobny sposób zbiór liczb pierwszych.

(c) Pokaż, że nie da się w ten sposób zdefiniować zbioru liczb parzystych.

4. Czy istnieje zbiór A taki, że $|\mathcal{P}(A)| = |\mathbb{N}|$?

5. Dane są zbiory

$$X = \{f \in \{0,1\}^{\mathbb{Z}} : \exists k \in \mathbb{Z}\, \forall l \leq k \;\; f(l) = 0\},$$
$$Y = \{f \in \{0,1\}^{\mathbb{Z}} : \exists k \in \mathbb{Z}\, \forall l \geq k \;\; f(l) = 1\}.$$

(a) Wskaż bijekcję ze zbioru X na zbiór Y.

(b) Udowodnij, że zbiory X i Y są mocy continuum.

(c) Znajdź moc zbioru $X \cap Y$.