Teoria Mnogości

Zadania kwalifikacyjne

WWW18

Michał Horodecki

Wstęp

Forma rozwiązań dowolna, byle czytelna.
Nie trzeba robić wszystkiego, ale zachęcam żeby zrobić jak najwięcej ;)
W razie jakichkolwiek pytań i wątpliwości śmiało piszcie maila na `michalhorodecki2002@gmail.com`

Zadanie 0

Napisz krótko coś o sobie. Dlaczego chcesz iść na te warsztaty, jakie jest Twoje doświadczenie z matematyką i jak wiele słyszał_ś o teorii mnogości?

Definicje do zadań

Język rachunku predykatów
Zdanie w (na nasze potrzeby uproszczonym) rachunku predykatów składa się z:

- zmiennych $(x, y, z, ...)$
- predykatów $(p, q, r, ...)$ - zwracających wartości logiczne
- spójników logicznych $\wedge, \vee, \neg, \Rightarrow, \iff$
- kwantyfikatorów $\forall$ - dla każdego, $\exists$ - istnieje

Modelem nazwiemy zbiór D - który będziemy nazywać jego dziedziną oraz stowarzyszone z tym zbiorem predykaty

Indukcja matematyczna:
Jeśli jakieś twierdzenie zachodzi dla $n_0 \in \mathbb{N}$ oraz dla każdego $n \geq n_0$ z faktu, że zachodzi ono dla n wynika, że zachodzi też dla $n + 1$ to twierdzenie to zachodzi dla wszystkich liczb $n \geq n_0$

Zadanie 1 [5pkt]

Niech $v(\varphi)$ oznacza wartość logiczną zmiennej φ
Określ czy poniższe formuły logiczne są prawdziwe czy fałszywe, jeśli $v(p) = 1, v(q) = 0, v(r) = 1$

1. $p \wedge \neg q$
2. $p \Rightarrow (q \vee r)$
3. $(p \Rightarrow q) \Rightarrow p$
4. $(p \iff \neg(q \iff r))$
5. $(\neg(p \vee q \vee r)) \Rightarrow (p \wedge q \wedge r)$

Zadanie 2 [10pkt]

Rozważmy model, którego dziedziną są dodatnie liczby naturalne.
Mamy w nim dany predykat binarny $p(x, y)$, gdzie $p(x, y) = 1$ wtedy i tylko wtedy gdy x gdzieli y
Za pomocą tylko kwantyfikatorów oraz tego predykatu (tj. nie korzystając z innych niż podzielność zależności między liczbami) napisz formuły, które są równoważne poniższym stwierdzeniom.

Uwaga: Można (i warto) używać pomocniczych predykatów po ich zapisaniu. (np. po zapisaniu formuły na podpunkt 1 wolno używać znaku równości przy kolejnych podpunktach)

Przykład

0. $x = 0$
Chcemy wyrazić ten fakt mając do dyspozycji podzielność. Możemy to zrobić na trzy sposoby:

- 0 jest podzielne przez wszystkie liczby

$$\forall y : p(y, x)$$

- 0 niczego nie dzieli (bo podzielność przez 0 nie ma sensu)
  Dla każdej liczby y nieprawdą jest, że jest podzielna przez 0

$$\forall y : \neg p(x, y)$$

  Alternatywnie: Nie istnieje taka liczba y, że 0 ją dzieli

$$\neg \exists y : p(x, y)$$

Zadania

1. $x = y$
2. $x = 1$ (Bez używania cyfr!)
3. x jest liczbą pierwszą
4. x jest kwadratem liczby pierwszej
5. x jest iloczynem dwóch różnych liczb pierwszych
6. x jest potęgą liczby pierwszej
7. d jest największym wspólnym dzielnikiem x i y
8. x jest względnie pierwsze z y
9. Dla każdych dwóch liczb istnieje ich największy wspólny dzielnik
10. Dla każdych dwóch liczb istnieje ich najmniejsza wspólna wielokrotność

Zadanie 3 [6pkt]

Za pomocą indukcji matematycznej pokaż że dla każdego $n \geq 1$ zachodzą poniższe stwierdzenia:

Przykład

0. $2^n > n$
Najpierw pokazujemy, że jest to prawda dla $n = 1$, istotnie $2 > 1$
Teraz załóżmy, że wiemy, że dla jakiegoś n mamy $2^n > n$.
Chcemy pokazać, że wynika z tego, że $2^{n+1} > n + 1$.
Pomnóżmy obie strony poprzedniej nierówności przez 2

$$2 \cdot 2^n > 2 \cdot n$$

$$2^{n+1} > n + n$$

$$2^{n+1} > n + 1$$

Zatem udowodniliśmy żądaną implikację i na mocy indukcji matematycznej fakt zachodzi dla każdego $n \geq 1$

Zadania

1. $1 + 3 + 5 + ... + 2n - 1 = n^2$
2. $1 + 2 + 3 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2}$
3. $1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
4. $1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + ... + n \cdot n! = (n + 1)! - 1$
5. $a + aq + aq^2 + ... + aq^{n-1} = a\frac{1-q^n}{1-q}$ dla dowolnych $a \in R, q \neq 1$
6. kwadratową planszę o wymiarach $2^n \times 2^n$ pól z usuniętym jednym polem da się pokryć klockami w kształcie litery L, składającymi się z trzech pól.