

# Teoria Mnogości

## Zadania kwalifikacyjne

WWW18

Michał Horodecki

## Wstęp

Forma rozwiązań dowolna, byle czytelna.

Nie trzeba robić wszystkiego, ale zachęcam żeby zrobić jak najwięcej ;)

W razie jakichkolwiek pytań i wątpliwości śmiało piszcie maila na [michalhorodecki2002@gmail.com](mailto:michalhorodecki2002@gmail.com)

## Zadanie 0

Napisz krótko coś o sobie. Dlaczego chcesz iść na te warsztaty, jakie jest Twoje doświadczenie z matematyką i jak wiele słyszałś o teorii mnogości?

## Definicje do zadań

### Język rachunku predykatów

Zdanie w (na nasze potrzeby uproszczonym) rachunku predykatów składa się z:

- zmiennych  $(x, y, z, \dots)$
- predykatów  $(p, q, r, \dots)$  - zwracających wartości logiczne
- spójników logicznych  $\wedge, \vee, \neg, \Rightarrow, \Leftrightarrow$
- kwantyfikatorów  $\forall$  - dla każdego,  $\exists$  - istnieje

**Modelem** nazwiemy zbiór  $D$  - który będziemy nazywać jego dziedziną oraz stowarzyszone z tym zbiorem predykaty

### Indukcja matematyczna:

Jeśli jakieś twierdzenie zachodzi dla  $n_0 \in \mathbb{N}$  oraz dla każdego  $n \geq n_0$  z faktu, że zachodzi ono dla  $n$  wynika, że zachodzi też dla  $n + 1$  to twierdzenie to zachodzi dla wszystkich liczb  $n \geq n_0$

## Zadanie 1 [5pkt]

Niech  $v(\varphi)$  oznacza wartość logiczną zmiennej  $\varphi$

Określ czy poniższe formuły logiczne są prawdziwe czy fałszywe, jeśli  $v(p) = 1, v(q) = 0, v(r) = 1$

1.  $p \wedge \neg q$
2.  $p \Rightarrow (q \vee r)$
3.  $(p \Rightarrow q) \Rightarrow p$
4.  $(p \Leftrightarrow \neg(q \Leftrightarrow r))$
5.  $(\neg(p \vee q \vee r)) \Rightarrow (p \wedge q \wedge r)$

## Zadanie 2 [10pkt]

Rozważmy model, którego dziedziną są dodatnie liczby naturalne.

Mamy w nim dany predykat binarny  $p(x, y)$ , gdzie  $p(x, y) = 1$  wtedy i tylko wtedy gdy  $x$  dzieli  $y$ . Za pomocą tylko kwantyfikatorów oraz tego predykatu (tj. nie korzystając z innych niż podzielność zależności między liczbami) napisz formuły, które są równoważne poniższemu stwierdzeniu.

Uwaga: Można (i warto) używać pomocniczych predykatów po ich zapisaniu. (np. po zapisaniu formuły na podpunkt 1 wolno używać znaku równości przy kolejnych podpunktach)

1.  $x = y$
2.  $x = 1$  (Bez używania cyfr!)
3.  $x$  jest liczbą pierwszą
4.  $x$  jest kwadratem liczby pierwszej
5.  $x$  jest iloczynem dwóch różnych liczb pierwszych
6.  $x$  jest potęgą liczby pierwszej
7.  $d$  jest największym wspólnym dzielnikiem  $x$  i  $y$
8.  $x$  jest względnie pierwsze z  $y$
9. Dla każdych dwóch liczb istnieje ich największy wspólny dzielnik
10. Dla każdych dwóch liczb istnieje ich najmniejsza wspólna wielokrotność

## Zadanie 3 [6pkt]

Za pomocą indukcji matematycznej pokaż że dla każdego  $n \geq 1$  zachodzą poniższe stwierdzenia:

1.  $1 + 3 + 5 + \dots + 2n - 1 = n^2$
2.  $1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$
3.  $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
4.  $1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \dots + n \cdot n! = (n + 1)! - 1$
5.  $a + aq + aq^2 + \dots + aq^{n-1} = a \frac{1-q^n}{1-q}$  dla dowolnych  $a \in R, q \neq 1$
6. kwadratową planszę o wymiarach  $2^n \times 2^n$  pól z usuniętym jednym polem da się pokryć klockami w kształcie litery L, składającymi się z trzech pól.