Abstrakcyjna algebra liniowa - zadania kwalifikacyjne

Jacek Horecki

Maj 2022

1 Informacje wstępne

1.1 Kontakt i wysyłanie rozwiązań

- Zadania wysyłamy przez stronę internetową warsztatów.
- Błędy i niejasności w zadaniach proszę zgłaszać na maila `jacek.kurek21@gmail.com`
- W razie trudności w rozwiązywaniu zadań służę pomocą, pytania można kierować mailowo na `jacek.kurek21@gmail.com`albo łapać mnie na discordzie warsztatów (Janczar Knurek)
- Aby zakwalifikować się na warsztaty nie trzeba rozwiązywać wszystkich zadań, warto zrobić zadania z każdej sekcji.

1.2 O treści zadań

Podstawowym celem zadań w poniższym zestawie jest danie oczestnikom podstawowych narzędzi do pracy z przestrzeniami liniowymi. Dla porządku przytoczę w nim przydatne definicje oraz twierdzenia, z których będziemy - często bez dowodu - korzystać w trakcie zajęć.

Jako że w internecie oraz w formie drukowanej dostępnych jest wiele wysokiej klasy skryptów do algebry liniowej, ten dokument zawiera tylko wybrane definicje pojawiające się w zadaniach. Jako wprowadzenie proponuję na przykład serię materiałów Essence of Linear Algebra. Kluczowe jest pierwsze 6 wykładów oraz ostatni o abstrakcyjnych przestrzeniach wektorowych. .

2 Oznaczenia

- Pogrubionym znakiem $\mathbf{0}$ oznaczam wektor zerowy w przeciwieństwie do 0 - liczby rzeczywistej.
- Macierz identycznościową oznaczam symbolem $\boldsymbol{I}$

3 Zadania

3.1 Przestrzenie wektorowe

Zadanie 1. (2 pkt) Zapoznaj się z definicją przestrzeni wektorowej, następnie uzasadnij że następujące obiekty są przestrzeniami wektorowymi:

- $\mathbb{R}_k[x]$ - zbiór wielomianów stopnia co najwyżej k.
- $\mathbb{R}[x]$ - zbiór wielomianów dowolnego stopnia.

3.2 Odwzorowania liniowe

Odwzorowaniem liniowym nazywamy odwzorowanie $f : U \to V$ gdzie U i V to przestrzenie wektorowe które spełnia następujące własności

- $f(u_1 + u_2) = f(u_1) + f(u_2)$
- $f(\alpha u) = \alpha f(u)$

Często zapisuje się to za pomocną jednego równania

$$f(\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2) = \alpha_1 f(u_1) + \alpha_2 f(u_2)$$

Zadanie 2. **(2 pkt)** Uzasadnij że następujące funkcje są odwzorowaniami liniowymi:

- $f : \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}$ dana wzorem
$$f(a_0 + xa_1 + \ldots + a_k x^k) = a_0 + a_1 + \ldots + a_k$$
- $f : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}_2[x]$ dana wzorem
$$f(a_0 + a_1 x + a_2 x^2) = a_0 + a_1(x + 2) + a_2(x + 2)^2$$
Jeśli są odwracalne to wskaż odwrotność.

Przypomnijmy najważniejsze fakty i definicje dotyczące odwzorowań liniowych:

- $f : U \to V$ nazywamy injekcją (monomorfizmem), jeśli jest różnowartościowe, tzn
$$\forall_{u_1,u_2 \in U} f(u_1) = f(u_2) \Rightarrow u_1 = u_2$$
- $f : U \to V$ nazywamy surjekcją (epimorfizmem), jeśli $\forall_{v \in V} \exists_{u \in U} f(u) = v$, innymi słowy jeśli każde równanie postaci $f(x) = v$ ma rozwiązanie.
- Jeśli f jest na raz mono i epi morfizmem to mówimy że f jest izomorfizmem.

Zadanie 3. **(4 pkt)** Wykaż następujące fakty o odwzorowaniach liniowych:

- f jest monomorfizmem wtedy i tylko wtedy gdy równanie $f(x) = \mathbf{0}$ ma dokładnie jedno rozwiązanie ($x = \mathbf{0}$)
- Dla $f : U \to V$ definiujemy $\ker f \subset U$ zdefiniowane jako
$$\ker f = \{u \in U : f(u) = \mathbf{0}\}$$
innymi słowy jest to zbiór wszystkich wektorów z U które są przez f zmapowane na $\mathbf{0}$. Wykazać, ze $\ker f$ jest przestrzenią liniową.

Zadanie 4. **(2 pkt)** Zdefiniujmy następujące odwzorowania liniowe:

$$f : \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}[x], \quad g : \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}[x]$$

dane wzorami

$$f(a_0 + a_1 x + \ldots + a_k x^k) = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \ldots + a_k k x^{k-1}$$
$$g(a_0 + a_1 x + \ldots + a_k x^k) = a_0 x + \frac{a_1}{2} x^2 + \ldots + \frac{a_k}{k+1} x^{k+1}$$

Czy f i g są wzajemnymi odwrotnościami?

3.3 Baza

Bazą przestrzenii wektorowej V nazywamy zbiór $\{v_1, \ldots, v_n\} \subset V$ który spełnia dwa warunki:

- Dla każdego $v \in V$ istnieje $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ dla których zachodzi

$$a_1 v_1 + \ldots + a_n v_n = v$$

  Sumę taką nazywamy kombinacją liniową wektorów $v_1, \ldots, v_n$ o współczynnikach $a_1, \ldots, a_n$.

- Dla każdych $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ zachodzi

$$a_1 v_1 + \ldots a_n v_n = \mathbf{0} \Rightarrow a_1 = a_2 = \ldots = a_n = 0$$

Zbiór który posiada pierwszą własność nazywamy generującym, zbiór który posiada drugą własność - liniowo niezależnym.

Zadanie 5. (3 pkt) Wykaż, że jeśli $v_1, \ldots, v_n \in V$ jest bazą, to każdy $v \in V$ zapisuje się jednoznacznie jako kombinacja liniowa wektorów $v_1, \ldots, v_n$.

Poniżej szereg przydatnych własności:

- Każda przestrzeń wektorowa posiada bazę (być może nieskończoną!)
- Dowolne dwie bazy ustalonej przestrzeni wektorowej są równoliczne.
- Z dowolnego zbioru generującego da się wybrac bazę.
- Dowolny zbiór liniowo niezależny da się uzupełnić do bazy.

3.4 Wymiar

Wymiarem przestrzeni V nazywamy liczbę n taką że V ma bazę złożoną z n wektorów. Wymiar oznaczamy przez $\dim V$. Jeśli przestrzeń wektorowa nie posiada skończonej bazy, to mówimy że ma wymiar nieskończony i piszemy $\dim V = \infty$.

Podstawowe własności wymiaru:

- Jeśli $f : U \to V$ jest injekcją to $\dim U \leqslant \dim V$.
- Jeśli $f : U \to V$ jest surjekcją to $\dim U \geqslant \dim V$.

Zadanie 6. (*5 pkt) Niech $f : U \to V$ będzie surjekcją, Wykazać, że

$$\dim U - \dim \ker f = \dim V$$

Podpowiedź: Skorzystać z własności baz wymienionych w poprzedniej sekcji.

Zadanie 7. (2 pkt) Niech $f : U \to V$ będzie odwzorowaniem liniowym, $\dim U = \dim V$. Niech $e_1, \ldots, e_n$ będzie bazą V. Wykazać, że jeśli dla każdego k, równanie

$$f(x) = e_k$$

ma rozwiązanie, każde równanie postaci $f(x) = v$ ma rozwiązanie, co więcej f jest izomorfizmem.

3.5 Macierze

Chociaż celem naszych warsztatów będzie unikanie kontaktu z macierzami, pozostają one świetnym narzędziem obliczeniowym i ułatwiają poszukiwania przykładów. Kluczowym w tej sekcji jest zrozumienie jak macierze mają się do odwzorowań liniowych.

Zadanie 8. (4 pkt) Zapisz poniższe funkcje jako macierze w zadanych bazach

- $f : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}_2[x]$ dana wzorem
$$f(a_0 + a_1x + a_2x^2) = a_0 + a_1(x+2) + a_2(x+2)^2$$
w bazie danej przez elementy $(1, x, x^2)$
- $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dane przez
$$f((x, y)) = (x + y, x + y)$$
w bazie danej przez wektory $(1, 1)$ oraz $(-1, 1)$.

Zadanie 9. (5 pkt)

- Podaj przykład dwóch róznych funkcji liniowych f_1, f_2 oraz dwóch różnych baz B_1 B_2 takich że f_1 zareprezentowana w bazie B_1 ma tą samą macierz co f_2 zareprezentowana w bazie B_2.
- Podaj przykład dwóch odwzorowań liniowych f_1, f_2 dla których nie istnieją bazy B_1, B_2 takie że f_1 w bazie B_1 ma taką samą reprezentację macierzową jak f_2 w B_2.

Zadanie 10. (3 pkt) Dla każdej z wymienionych poniżej własności znaleźć macierz 3×3 M nie będącą zerem ani identycznością:

- $M^2 = \boldsymbol{I}$
- $M^3 = \boldsymbol{I}$
- $M^2 = M$

Zadanie 11. (4 pkt) W ogólności mnożenie macierzy jest operacją nieprzemienną, tzn nie dla wszystkich macierzy zachodzi $A \cdot B = B \cdot A$. Czasami jednak równość zachodzi, np. $\boldsymbol{I} \cdot M = M \cdot \boldsymbol{I}$ dla dowolnej macierzy M. Dla każdej z podanych poniżej macierzy wyznacz zbiór wszystkich macierzy z nią przemiennych:

- $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$
- $\begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$ dla ustalonej wartości parametru λ.

3.6 Algebry

Algebrą nazywamy przestrzeń wektorową V wraz z działaniem $p : V \times V \to V$ które jest dwuliniowe tzn:

$$p(\alpha x + \beta y, z) = \alpha p(x, z) + \beta p(y, z)$$
$$p(x, \alpha y + \beta z) = \alpha p(x, y) + \beta p(x, z)$$

Od p można wymagać szeregu dodatkowych własności, w zależności od tego które z poniższych są spełnione, mówimy o algebrach:

- Przemiennych jeśli dla każdego $u, v \in V$ zachodzi

$$p(u, v) = p(v, u)$$

- Łącznych jeśli dla każdych $u, v, w \in V$ zachodzi

$$p(u, p(v, w)) = p(p(u, v), w)$$

- Z jedynką (unitarnych) jeśli istnieje $e \in V$ takie że dla każdego $v \in V$ zachodzi

$$p(e, v) = p(v, e) = v$$

- Z dzieleniem jeśli mają jedynkę e i ponadto dla dowolnego $v \in V$ istnieje u takie że

$$p(u, v) = p(v, u) = e$$

  Element u nazywamy odwrotnością elementu v.

Zadanie 12. (6 pkt) Wskaż przykład algebr na $\mathbb{R}^3$ które są

- Niełączne, nieprzemienne i bez jedynki
- Łączne i przemienne ale bez jedynki
- Z jedynką ale bez dzielenia

Zadanie 13. (4 pkt) Niech $V = \mathbb{R}^2$, zdefiniujmy algebrę $\times$ daną wzorem

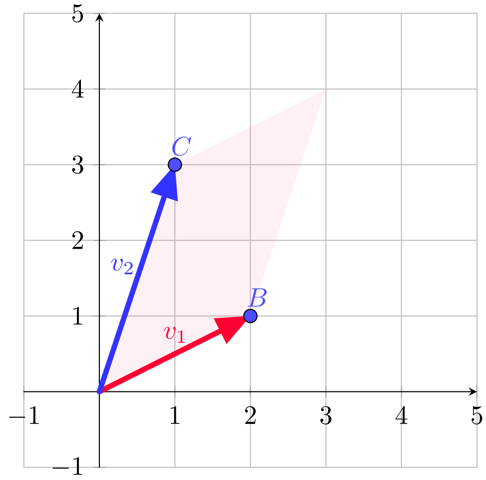
$$(a, b) \times (c, d) = (ac - bd, ad + bc)$$

Wykaż że jest to przemienna łączna unitarna algebra z dzieleniem.

Zadanie 14. (5 pkt) Niech $V = \mathbb{R}^2$, zdefiniujmy algebrę $\times$ daną wzorem

$$(a, b) \times (c, d) = (ac + bd, ad + bc)$$

- Wykazać że jest to przemienna łączna unitarna algebra bez dzieleniem
- Jak wyglądają elementy nieodwracalne?
- Czy ta algebra może być izomorficzną z algebrą z poprzedniego zadania?



Rysunek 1: Równoległobok o dodatnim polu.

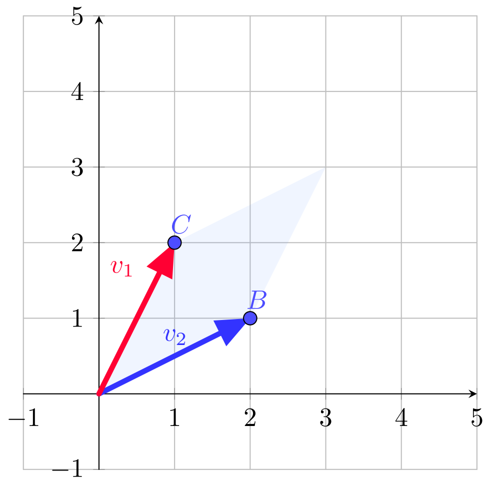
3.7 Geometria

Skierowanym równoległobokiem na płaszczyźnie nazwiemy uporządkowaną parę wektorów $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^2$. Zdefiniujmy funkcję D "pola ze znakiem" przypisującą skierowanemu równoległobokowi jego pole, przy czym pole traktujemy jako liczbę dodatnią jeśli v_1, v_2 opisuje boki równoległoboku w kolejności przeciwnej do wskazówek zegara, w przeciwnym wypadku zaś ujemną (patrz rysunki). Jeśli wektory v_1, v_2 są współliniowe to sytuacja się degeneruje i otrzymujemy równoległobok skierowany o polu zero.

Potraktujmy wyżej opisaną funkcję jako odwzorowanie $D : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

Zadanie 15. (5 pkt)

- Wykaż że D jest antysymetryczne tzn $D(u, v) = -D(v, u)$
- Wykaż że D jest odwzorowaniem dwuliniowym.
- Znajdź wzór jawny na D używający współrzędnych wektorów v_1, v_2.



Rysunek 2: Równoległobok o ujemnym polu.