Zadania kwalifikacyjne

1 Wstęp

Zadania proszę wysyłać przez stronę warsztatów (w innym wypadku nie będę mógł ich ocenić) w terminie podanym na stronie, tj. 28 maja, w dowolnym czytelnym formacie. Dobrze jest wysłać zadania wcześniej, postaram się wtedy jak najszybciej podać moje uwagi i będzie można dosyłać poprawki. Oczywiście nie trzeba robić wszystkich zadań (ale można). Zadania wymagają trochę wiedzy na temat analizy matematycznej i teorii liczb. Na stronie warsztatów podałem linki do przydatnych materiałów. W razie jakichkolwiek pytań lub wątpliwości zapraszam do kontaktu mailowego na m.zimny@students.mimuw.edu.pl.

2 Zadania

1. Udowodnij, że szereg
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$
jest zbieżny dla $s > 1$ i rozbieżny dla $s \leq 1$.

2. Oblicz granicę
$$\lim_{x \to 0} \frac{2\sin(1-\cos(x)) - \tan(\sin(x))^2}{(\cos(x)-1)^2}.$$
Wskazówka: Szereg Taylora.

3. Niech $\varphi : \mathbb{N}_+ \to \mathbb{N}_+$ będzie funkcją zdefiniowaną następująco:
$$\varphi(n) = \text{liczba liczb naturalnych niewiększych od } n \text{ i względnie pierwszych z } n.$$
Funkcję tę nazywa się funkcją Eulera lub tocjentem. Udowodnij, że dla dowolnego n
$$\sum_{d|n} \varphi(d) = n.$$

4. **Twierdzenie Dirichleta dla** $a = 3$
a) Udowodnij, że istnieje nieskończenie wiele liczb pierwszych postaci $3k+2$ dla $k \in \mathbb{N}$.
b)* Udowodnij, że istnieje nieskończenie wiele liczb pierwszych postaci $3k+1$ dla $k \in \mathbb{N}$.

5. a) Pokaż, że jeżeli funkcja ciągła $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest nierosnąca, to dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$
$$\sum_{k=1}^{n} f(k) \leq \int_0^n f(x)dx \leq \sum_{k=0}^{n-1} f(k).$$
b) Udowodnij, że funkcja
$$f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} - \frac{1}{s-1}$$
jest ograniczona na $s \in (1, \infty)$.