Zadania kwalifikacyjne na WWW18
„Lagranżjany, czyli jak uprawiać fizykę teoretyczną ”

2 maja 2023

„The time has come”, the walrus said, „to speak of many things,
of symmetries, lagrangians, and changeless transformings. ”
Re-rendering of Lewis Carroll
by R. Klauber
[1]

1 Słowo Wstępu

Deadline jest taki jak na stronie WWW18.

Zadania proszę przysyłać w formacie PDF (sugerowany latex) lub skanów, wrzuconych do PDF'a lub odpowiednio **ponumerowanymi plikami** na stronę WWW.

W razie konkretnych pytań/wątpliwości co do zadań/pytań natury ogólnej/ogólnej chęci rozmowy można do mnie pisać. Email: ag9@onet.eu Polecam też wysyłać jak najwcześniej swoje rozwiązania, można by je wtedy poprawić.

Jako że planuje na tych zajęciach mówić o fizyce, potrzebujemy wyrobić sobie odpowiedniego języka do mówienia o niej. Tym językiem jest matematyka i właśnie na niej skupię się w tych zadaniach kwalifikacyjnych.

Może się zdarzyć sytuacja że znajdziecie rozwiązanie danego problemu w internecie, jeżeli tak się stanie prosiłbym o **podanie źródła** na, którym się opieraliście. Bazowanie na źródeł z internetu jest dopuszczalne dopóki nie spisujecie 1-1 a chociaż próbujecie zrozumieć co jest napisane, ale bazowanie na koledze/koleżance jest **nie okej** i może skutkować **wyzerowaniem punktów.** Maksymalna liczba punktów do zdobycia to 20. Z góry przepraszam za potencjalne błędy, jeżeli coś jest nie jasne proszę o maila.

2 Zadania

Jeżeli czytelnik po raz pierwszy spotyka się pojęciem „pochodnej” lub „całki” należy najpierw obejrzeć „Essence of Calculus” na yt klik. Następnie warto by żeby czytelnik jeszcze przerobił parę przykładów chociażby te klik, a dla zaznajomionych z tematem polecam przerobić te parę z tych dla przypomnienia klik zadanie 7.

[1]Sam cytat pochodzi z „Student friendly quantum field theory” autorstwa Robert D. Klauber

2.1 Ćwiczenia

Są to ćwiczenia wprowadzające do reszty zadań, więc zrób je w pierwszej kolejności...

Ćwiczenie 1 (1pkt.)
Oblicz pochodną funkcji:

$$f(x) = x^2 \sin(x)$$

$$g(x) = \cos(x)\sin(x)$$

Ćwiczenie 2 (1 pkt.) Oblicz

$$\int \sin(x)\cos(x)dx$$

$$\int_0^\pi \sin(x)dx$$

Ćwiczenie 3 (0,5 pkt.) Podaj jedną dowolną fizyczną interpretacje pochodnej po czasie funkcji.
Ćwiczenie 4 (0,5 pkt.) Czy miałeś wcześniej, przed warsztatami do-czynienia z pochodną i całką?
Ćwiczenie 5 Oblicz sprzężenie zespolone liczby: (1pkt.)
a) 1
b) i
c) $42 + 13i$
d) $\alpha + \beta i$
Ćwiczenie 6 Oblicz Sprężenie Hermitowskie macierzy: (1pkt)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & i \\ i & 2 \end{bmatrix}$$

Czy ta macierz jest Hermitowska?

2.2 Właściwe zadania

Zadanie 1 (1 pkt.) (Śmieszna całka)
Pokaż, że

$$\int_{-1}^{1} \frac{\cos(x)}{e^{\frac{1}{x}} + 1} dx = \sin\left(\frac{180°}{\pi}\right)$$

. Wskazówka do zadania 1. rozważ funkcję pomocniczą

$$g(x) = \frac{\cos(x)}{d(x) + 1},$$

gdzie d(x) to dowolna funkcja. Rozłoż g na funkcję parzystą i nie parzystą.

Wskazówka do zadań 2, 3, 4 .
Siła F_x działająca na ciało, w kierunku x będące w polu o energii potencjalnej V, zależnością

$$F_x = -\frac{\partial V}{\partial x}$$

W szczególności V może być funkcją wielu zmiennych.
W zadaniach 2, 3, 4 rozważamy jednowymiarowy ruch na osi x.

Zadanie 2 (2 pkt.)
a)
Rozwiąż równania ruchu[2] dla cząstki o masie m w polu o potencjale (0,5 pkt.)

$$V = \frac{kx^2}{2}$$

Podaj przykład układu fizycznego opisywanego, przez te równanie. (0,5 pkt.)

b)
Rozwiąż równania ruchu[3] dla cząstki o masie m w polu o potencjale (0,5 pkt.)

$$V = kx$$

Podaj przykład układu fizycznego opisywanego, przez te równanie. (0,5 pkt.)

Zadanie 3. (2pkt.) Pokaż, że równanie Eulera-Lagrange spełniają równania Newtona[4], dla uproszczenia załóż że ruch jest jednowymiarowy i klasyczny.
Wskazówki:
Jak wygląda Lagrangian w mechanice klasycznej?
Równanie E-L w jednym wymiarze:

$$\frac{d}{dt}\frac{dL}{d\dot{x}} - \frac{dL}{dx} = 0,$$

gdzie $\dot{x}$ oznacza pochodna po czasie z x. L jest tzw. langrażjanem.

Zadanie 4 (2 pkt.)
Rozważmy ruch cząstki o masie m w pewnym polu, które jest zachowawcze. Rozważamy ruch wzdłuż osi OX.
a)Co to znaczy, że siła jest zachowawcza(pole jest zachowawcze)? (1pkt.)
b)Pokaż że równania ruchu, są rozwiązaniem takiego równania całkowego: (1 pkt.)

$$\int \sqrt{\frac{m}{2}} \frac{dx}{\sqrt{E - mV(x)}} = \int dt,$$

przy czym całki są w odpowiednich graniach, jakie to granice? Czym jest E i $V(x)$, w szczególności czy $V(x)$ istnieje ?
Wsk. Z odpowiedzi na pytanie a) wynika b).
Wsk. Mamy jakaś funkcje różniczkowalna $x(t)$, to wtedy można zrobić przejścia

$$(x'(t))^2 = (\frac{dx}{dt})^2 = A \Rightarrow \int dx = \int dt\sqrt{A},$$

gdzie A liczba.
Zadanie 5 (4 pkt)
Mając Lagranżjan $\mathcal{L}$ jako funkcję funkcji $\phi(t, x, y, z)$ rzeczywistej $\phi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ i jej pochodnych. Wyprowadź równania Kleina-Gordona (K-G) z $\mathcal{L}$ określonego wzorem (3pkt.), dla

[2] tj. znajdź zależność $x(t)$
[3] tj. znajdź zależność $x(t)$
[4] $F = ma$

$$\mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi, ..) = \frac{1}{2} \sum_{\mu=0,1,2,3} \sum_{\nu=0,1,2,3} \partial_\mu \phi \partial^\nu \phi - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 \tag{1}$$

Jakiemu sławnemu z relatywistki, „odpowiada" równanie K-G (1pkt.) jeżeli dodam że energia jest „jakoś" powiązana z pochodną po czasie a pęd gradientem po składowych przestrzennych? Słowo „jakoś" oznacza tutaj związek wynikających z zasad mechanik kwantowej.
Podpowiedzi:

1. ∂_μ oznacza pochodną względem μ-tewego kierunku – t,x,y,z odpowiadają indeksom 0,1,2,3, na przykład $\partial_0 = \frac{\partial}{\partial t}$
2. Ustaliłem metrykę na $(+,-,-,-)$ Co oznacza że
$$\partial^0 = \partial_0$$
ale
$$\partial^1 = -\partial_1,$$
oraz że dla $\mu \neq \nu$ mamy
$$\partial_\mu \phi \partial \phi^\nu = 0$$
.
3. Równania E-L w takim przypadku są równe:
$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = \sum_\mu \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi},$$
co czytamy z lewej pochodna $\mathcal{L}$ po ϕ, jest równa suma po wszystkich kierunkach z pochodnej po μtym kierunku po pochodnej $\mathcal{L}$ względem $\frac{\partial \phi}{\partial x_\mu}$.
4.
`https://en.wikipedia.org/wiki/Momentum_operator`
`https://en.wikipedia.org/wiki/Energy_operator`

Zadanie 6
(4 pkt) Wyprowadź równanie opisujące geometrie brachistochrony z równań E-L. (jakieś równanie uwikłane lub jawne określające współrzędne brachistochrony) Co to jest Brachistochrona, oraz wskazówki znajdziecie tutaj: `https://pl.wikipedia.org/wiki/Brachistochrona` Inne wyprowadzenie znajdziecie tutaj: `https://www.youtube.com/watch?v=Cld0p3a43fU&ab_channel=3Blue1Brown`