Co to znaczy, że coś się "dobrze transformuje"?

Jakub Jurczak

0 Słowem wstępu

Naszym głównym celem podczas warsztatów będzie odpowiedzenie na pytanie zawarte w tytule, a mówiąc w sposób mniej zawoalowany - dowiedzieć się co nieco o rachunku tensorowym. Aby to zrobić będziemy musieli rozwinąć pewną małą armatę matematyczną, dlatego należy uprzedzić, że warsztaty mogą być miejscami nieco abstrakcyjne, aczkolwiek planuje robić dużo przykładów i rachunków, żeby lepiej wyobrazić sobie pewne koncepty.

Co do zadań kwalifikacyjnych, to dotyczą one głównie algebry liniowej (rachunku wektorowego), która będzie stanowić bazę (pun intended) do naszych rozważań. Niemniej jest to bardzo prosta i intuicyjna teoria.

Dla zgłębienia tematu, w opisie warsztatów zamieszczę link do skryptu MIMUW z GALu (Geometrii z algebrą liniową), gdzie proponuję zaznajomić się z rozdziałami 1., 3. i 4. (bez 4.7), a rozdział 2. przejrzeć poglądowo. Znacznie ułatwi to rozwiązywanie większości zadań. Alternatywnie, dla wielbicieli wizualnych przykładów, polecam kurs "The essence of linear algebra" znajdujący się na kanale 3Blue1Brown na platformie YouTube, jednakże część przedstawionych tam treści (np. wyznaczniki, wektory własne) nie jest kluczowa do zrobienia zadań wstępnych. Poza tymi dwoma, w opisie warsztatów, podlinkuje parę innych ciekawych źródeł i kursów. Gdyby ktoś miał pytania do zadań/warsztatów proszę śmiało pisać na adres: jk.jurczak@student.uw.edu.pl ze wstawką [WWW19] w tytule. Pamiętajcie także, żeby rozwiązania wysyłać na stronę, a nie mailem!

Jeśli zostanie na koniec czasu to zajmiemy się wykorzystaniem naszej teorii do badania zagadnień fizycznych np. powiem coś o Teorii Względności.

Na koniec zaproponuję konwencję zadaniową: zadania numerowane należy wrzucić na stronę, a te nienumerowane nie będą oceniane - są dla sportu i dobrego przećwiczenia (Nie trzeba także robić wszystkich "obowiązkowych" zadań, ale im więcej tym lepiej).

1 Zadania teoretyczne

W naszych rozważaniach będziemy operować na obiektach zwanymi wektorami. Wektory to elementy przestrzeni wektorowej, lecz czym jest sama przestrzeń wektorowa?

✧ Zadanie 1.1

> Sformułuj definicję przestrzeni wektorowej, bez używania słowa "strzałka". Podaj 2 przykłady takich przestrzeni, które nie są $\mathbb{K}^n$ i wytłumacz (nie trzeba ściśle dowodzić), że są to przestrzenie wektorowe.

Z dobrze sformuowanej definicji wynika, że naturalnym sposobem uzyskiwania nowych wektorów (v) w tej samej przestrzeni wektorowej ze starych (w_1,w_2) jest np. położenie: $v = aw_1 + bw_2$, gdzie $a, b \in \mathbb{K}$ ($\mathbb{K}$ to tzn. ciało bazowe). Jest to dobra motywacja dla następującej definicji: napis postaci $aw_1 + bw_2 + \dots$ nazywamy kombinacją liniową wektorów $(w_1, w_2, \dots)$. Kombinacja liniowa wektorów (z tej samej przestrzeni wektorowej) jest elementem tejże przestrzeni, czyli wektorem.

Dość istotną rolę dla teorii przestrzeni wektorowych gra pojęcie liniowej niezależności. Mowimy, że układ wektorów $(w_1, w_2, \dots)$ jest liniowo niezależny, gdy zachodzi:

$$aw_1 + bw_2 + \dots = 0 \Leftrightarrow a = b = \dots = 0$$

Zauważmy, że implikacja w lewą stronę jest trywialna, więc szkopuł leży w tej w prawą stronę. Jeśli układ nie spełnia tego warunku to mówimy, że układ jest liniowo zależny.

✧ Zadanie 1.2

> Udowodnij stwierdzenie:
> *Układ $(v_1, \dots, v_n)$ jest liniowo zależny.* $\Leftrightarrow$ *Istnieje v_k należacy do tego układu, który jest kombinacją liniową pozostałych elementów.*

Następnym w kolejności pojęciem przybliżającym nas do gwoździa programu jest pojęcie przestrzeni rozpiętej (generowanej) przez układ $(v_1, \dots, v_n)$. Jest to zbiór wszystkich kombinacji liniowych wektorów $(v_1, \dots, v_n)$. Alternatywnie jest to przecięcie wszystkich podprzestrzeni wektorowych (podzbiorów przestrzeni V, które same w sobie posiadają strukturę przestrzeni wektorowej) zawierających układ $(v_1, \dots, v_n)$. Dla dociekliwych:

✧ Zadanie

> Zastanów się, czemu te definicje są sobie równoważne.

Tym oto sposobem dochodzimy do punktu kulminacyjnego naszej teorii oraz głównego obiektu naszych zainteresowań:

✧ Zadanie 1.3

Sformułuj pojęcie bazy przestrzeni wektorowej i wymiaru przestrzeni wektorowej (nie trzeba dowodzić twierdzenia o równoliczności baz w ustalonej przestrzeni - zostaje dla dociekliwych). Następnie, w skończonym wymiarze, udowodnij, że rozkład dowolnego wektora w danej bazie jest jednoznaczny. Podaj (i udowodnij, że to bazy) po 2 bazy dla przestrzeni podanych w Zadaniu 1.1 oraz dla $\mathbb{R}^n$.

✧ Zadanie

Udowodnij (Lemat Steiniza):
Dowolny układ liniowo niezależny $(v_1, \ldots, v_k)$ możemy dopełnić elementami bazy $(w_1, \ldots, w_n)$ otrzymując bazę $(v_1, \ldots, v_k, w_{i_1}, w_{i_2}, \ldots)$, gdzie $i_1, i_2, \ldots$ to pewne indeksy.

Jak łatwo się zorientować, dla ustalonej przestrzeni istnieje wiele różnych baz, stąd wybór bazy jest arbitralny. Pracując z daną przestrzenią zwykle wybieramy bazę w taki sposób, aby rachunki były względnie przyjemne. Bazę możemy pojmować intuicyjnie jako układ współrzędnych w przestrzeni wektorowej, więc wybór bazy jest kwestią analogiczną do wyboru odpowiedniego układu współrzędnych.

Przykład
Weźmy $\mathbb{R}_2[\,\cdot\,]$, czyli przestrzeń rzeczywistych wielomianów co najwyżej 2 stopnia. Łatwo zweryfikować, że $e = (e_1 = 1, e_2 = t, e_3 = t^2)$ oraz $f = (f_1 = 1, f_2 = 1 + t, f_3 = 1 + t + t^2)$ to bazy $\mathbb{R}_2[\,\cdot\,]$. Dla przykładu: niech $v = t^2$. Wtedy $v = e_3$, ale równoważnie $v = -f_2 + f_3$. Możemy także zaproponować "notację": podać współczynniki kombinacji liniowej stojące przy e_1, e_2, e_3 (f_1, f_2, f_3 odpowiednio), z której otrzymujemy v. W takiej notacji:

$$v = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}_e, \quad v = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}_f$$

Oba te napisy reprezentują ten sam wektor t^2, mimo, że $\left[\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{smallmatrix}\right] \neq \left[\begin{smallmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right]$. Takie podanie wpółczynników kombinacji liniowej v będziemy nazywać **reprezentacją** v w danej bazie lub **wektorem kolumnowym**.

Obserwacja
Równość wektorów jest niezależna od wyboru bazy, tj. $(v = w)_e \Leftrightarrow (v = w)_f$, gdzie $(v = w)_{\_}$ oznacza, że pracujemy w bazie _. Jednakże reprezentacje tego samego wektora, w różnych bazach, na ogół są różne.

Stąd potrzebujemy narzędzia, aby mając wiedzę o rozkładzie v w bazie e znaleźć rozkład v w bazie f (zakładając, że wiemy wszystko o bazach e i f)

W następnej części zadań teoretycznych będziemy rozważali macierze (odwzorowania) zmiany bazy. ~~Wszak~~ Fszak, aby podejść do tego kompleksowo wypadałoby najpierw rozwinąć teorię i idee związane z odwzorowaniami liniowymi, jednak nie będę robił o tym zadań do ocenienia, gdyż byłoby tego za dużo. Dlatego:

✧ Zadanie (w sumie to nie tylko dla dociekliwych ale nie mam jak tego sprawdzić)

Zapoznaj się z faktami na temat odwzorowań liniowych (proponuje ze skryptu MIMu albo kursu 3Blue1Brown). W szczególności, czym są, czemu można je przedstawić jako macierz i (już trochę później) jak zmienić bazę w przypadku (macierzy) odwzorowania liniowego. Ciekawym zagadnieniem jest także: czym jest i jaki warunek musi spełniać odwzorowanie liniowe, aby można było je nazywać odwzorowaniem (macierzą) zmiany bazy?

Teraz jest na to dobra pora, aby powiedzieć, że w algebrze liniowej zwykle w rachunkach nie występują żadne potęgi, dlatego wprowadźmy zasadę, że indeksy górne są po prostu indeksami górnymi, a nie potęgami (gdy jednak zdarzą się gdzieś potęgi, zostanie to zaznaczone). Od tej pory także będziemy wykorzystywać konwencję sumacyjną Einsteina, ponieważ jest ona niesamowicie wygodna. Brzmi ona tak:

<u>Konwencja sumacyjna Einsteina</u>

Gdy w iloczynie pewnych wartości znajdzie się powtórzony indeks, jeden górny, drugi dolny, znaczy to, że należy wysumować to wyrażenie po tymże indeksie (po wszystkich jego wartościach).

Przykład

$$a^i_{kl} b^{jk}_i = \sum_i \sum_k a^i_{kl} b^{jk}_i$$

Bardziej namacalny przykład
Mając bazę e możemy zapisać w niej pewnien wektor v (tak jak w jeszcze poprzednim przykładzie):

$$v = v^1 e_1 + v^2 e_2 + \cdots + v^n e_n$$

W konwencji sumacyjnej wyrażenie to jest o wiele zgrabniejsze i dlatego będziemy je preferować:

$$v = v^i e_i$$

Zadania do oswojenia się z konwencją sumacyjną znajdą się w części rachunkowej.

Wracając do zagadnień związanych z bazami, zakładamy, że mamy bazy e i f, o których wiemy wszystko, w takim razie, zgodnie z naturą pojęcia bazy, możemy rozłożyć wektory bazowe z f w bazie e, co formalnie w konwencji sumacyjnej wygląda tak:

$$f_i = a_i^j e_j \tag{*}$$

gdzie a_i^j to pewne współczynniki.

Owe współczynniki możemy wstawić do macierzy. Jak dociekliwy czytelnik może już się domyślać, będziemy dążyć do tego, ażeby mnożąc macierz przez reprezentację wektora w bazie (wektor kolumnowy) otrzymać reprezentację wektora w innej bazie. Ale jest pewnien problem, mianowicie:

✧ Zadanie

Sprawdź, czy iloczyn reprezentacji wektora, powiedzmy w $\mathbb{R}^3$, w bazie $e = (\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix})$ przez macierz o współczynnikach a_i^j (*) zwraca reprezentację tego samego wektora w bazie $f = (\begin{bmatrix}2\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\2\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\0\\2\end{bmatrix})$

Jak łatwo się przekonać jest to nieprawda, że:

$$v_{(f)} = [a_i^j] \cdot v_{(e)}$$

gdzie $[a_i^j]$ to macierz o współczynnikach a_i^j (*). Albo równoważnie (nieprawda):

$$v_{(f)}^j = a_i^j v_{(e)}^i$$

gdzie $v_{\_}^{\cdot}$ to $\cdot$ wyraz wektora kolumnowego v w bazie $\_$.

✧ Zadanie 1.4

Podaj regułę transformacji wektorów kolumnowych (de facto to ich współczynników) w oparciu o znajomość współczynników a_i^j (Podpowiedź: rozpisz wektor v w bazie i pomyśl co nam daje (*))

Mając już tę wiedzę, mamy już niemal wszystkie narzędzia potrzebne na warsztatach. Resztę przedstawię w trakcie ich trwania.

2 Zadania rachunkowe

✧ Zadanie 2.1

Weźmy $\mathbb{R}^n$ i bazę standardową (jest to fachowe określenie tzn. współrzędnych kartezjańskich, czyli stałych, jednostkowych i wzajemnie prostopadłych wektorów bazowych, tworzących układ współrzędnych). Podaj **defnicję** (która nie angażuje pojęcia normy, czyli długości wektora, ani żadnych kątów) standardowego iloczynu skalarnego. **Następnie**, udowodnij, że:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}| \cos\theta$$

gdzie θ to geometryczny kąt między wektorami. (Podpowiedź: udowodnij dla $\mathbb{R}^2$ i uogólnij, tutaj nie polecam korzystać z wikipedii, bo są tam popisane błędy i herezje)

✧ Zadanie 2.2

Pracując w konwencji sumacyjnej Einsteina:

a) Uprość wyrażenie:

$$a^i b^k_j c_l \delta^j_i \delta^l_k$$

gdzie δ^i_j to tzn. delta Kroneckera.

b) Zapisz wyrażenie na i, j-ty wyraz macierzy zadanej przez iloczyn znanych macierzy:

$$\mathbf{F}^T \cdot \mathbf{g} \cdot \mathbf{F}$$

Załóż, że znamy elementy macierzowe F^k_l i g_{pq} (Tak, to nie przypadek, że mają indeksy w innych miejscach!)

✧ Zadanie 2.3

Podaj przykład macierzy M, która nie jest równa I, ani (UWAGA - potęga) M^n nie jest równe I dla $n \in \{1, 2, 3, 4\}$, natomiast $M^5 = I$, gdzie I to macierz identyczności (taka macierz, która po pomnożeniu przez reprezentację wektora daje ten sam wektor).

✧ Zadanie 2.4

Określ czy poniższe układy są bazami odpowiednich przestrzeni i uzasadnij:

a) $\begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ w ${\mathbb{R}^2}_2$ - przestrzeń macierzy 2×2

b) $(e_1 = 1, e_2 = t, e_3 = (t+1)^2 - (t-1)^2)$ w $\mathbb{R}_2[\,\cdot\,]$

✧ Zadanie 2.5

Niechaj $v = t^3 + 2t^2 + 3t + 4 \in \mathbb{R}_3[\,\cdot\,]$ oraz e i f będą bazami tej przestrzeni takimi, że:

$$e_1 = 1, e_2 = t, e_3 = t^2, e_4 = t^3$$

$$f_1 = 1, f_2 = 1 + t, f_3 = 1 + t + t^2, f_4 = 1 + t + t^2 + t^3$$

Podaj współczynniki a^j_i zmiany bazy z e w f (takie jak w (*)), skonstruuj macierz zmiany bazy, przedstaw v jako wektor kolumnowy w bazach e i

f oraz pokaż jak znając wektor kolumnowy v w bazie e znaleźć wektor kolumnowy w bazie f (i ewentualnie na odwrót).

✧ Zadanie 2.6

Śladem macierzy kwadratowej (lub odpowiedniego odwzorowania) nazywamy sumę wyrazów naprzekątniowych macierzy (macierzy odwzorowania), tzn. dla macierzy $[M_i^j]$

$$\mathrm{tr}([M_i^j]) = M_k^k$$

gdzie sumujemy po wskaźniku k. Udowodnij, że wartość śladu macierzy nie zależy od wyboru bazy. (Podpowiedź: warto wiedzieć jak się transformują macierze, a i także konwencja sumacyjna jest tutaj bardzo użyteczna)