Zadania kwalifikacyjne na WWW18
„Lagranżjany, czyli jak uprawiać fizykę teoretyczną ”

9 maja 2024

„The time has come”, the walrus said, „to speak of many things,
of symmetries, lagrangians, and changeless transformings. ”
Re-rendering of Lewis Carroll
by R. Klauber
[1]

1 Słowo Wstępu

Deadline jest taki jak na stronie WWW20.

Zadania proszę przysyłać w formacie PDF (sugerowany latex) lub skanów, wrzuconych do PDF'a lub odpowiednio **ponumerowanymi plikami** na stronę WWW.

W razie konkretnych pytań/wątpliwości co do zadań/pytań natury ogólnej/ogólnej chęci rozmowy można do mnie pisać. Email: ag9@onet.eu Polecam też wysyłać jak najwcześniej swoje rozwiązania, można by je wtedy poprawić.

Jako że planuje na tych zajęciach mówić o fizyce, potrzebujemy wyrobić sobie odpowiedniego języka do mówienia o niej. Tym językiem jest matematyka i właśnie na niej skupię się w tych zadaniach kwalifikacyjnych.

Może się zdarzyć sytuacja że znajdziecie rozwiązanie danego problemu w internecie, jeżeli tak się stanie prosiłbym o **podanie źródła** na, którym się opieraliście. Bazowanie na źródeł z internetu jest dopuszczalne dopóki nie spisujecie 1-1 a chociaż próbujecie zrozumieć co jest napisane, ale bazowanie na koledze/koleżance jest **nie okej** i może skutkować **wyzerowaniem punktów.** Maksymalna liczba punktów do zdobycia to 20. Z góry przepraszam za potencjalne błędy, jeżeli coś jest nie jasne proszę o maila.

2 Zadania

Jeżeli czytelnik po raz pierwszy spotyka się pojęciem „pochodnej” lub „całki” należy najpierw obejrzeć „Essence of Calculus” na yt klik. Następnie warto by żeby czytelnik jeszcze przerobił parę przykładów chociażby te klik, a dla zaznajomionych z tematem polecam przerobić te parę z tych dla przypomnienia klik zadanie 7.

[1]Sam cytat pochodzi z „Student friendly quantum field theory” autorstwa Robert D. Klauber

3 Polecenia

Zadanie 1 (2 pkt)
Znajdź rozwiązania $x(t)$ równania:

$$ma = kv \tag{1}$$

Z warunkami początkowymi $x(0) = x_0$. k-to współcznik nie zależny od prędkośći ani położenia. Na rysuj rozwiązanie.

Zadania 2 (2 pkt)
Równania Eulera Lagranga wygladają następująco:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) = \frac{\partial L}{\partial q} \tag{2}$$

tu q-oznacza dowolną współrzędną.
Podstawiając klasyczny Lagrażjan

$$L = \frac{1}{2}m\dot{q}^2 - E_p(q) \tag{3}$$

Wyprowadź z nich II zasadę dynamiki Newtona $F = ma$.
Zadanie 3 (2pkt.) Mając lagrażjan:

$$L \equiv T - V = \frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2 + (\ell + x)^2\dot{\theta}^2\right) + mg(\ell + x)\cos\theta - \frac{1}{2}kx^2 \tag{4}$$

Wyprowadź równania ruchu tj. równanie, którego rozwiązanie da funkcję $\theta(t)$ oraz $x(t)$. Nie musisz go rozwiązywać. Wskazówka patrz zadanie 2.
Zadanie 4 (4 pkt)
Mając Lagranżjan $\mathcal{L}$ jako funkcję funkcji $\phi(t, x, y, z)$ rzeczywistej $\phi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ i jej pochodnych. Wyprowadź równania Kleina-Gordona (K-G) z $\mathcal{L}$ określonego wzorem (3pkt.), dla

$$\mathcal{L}(\phi, \partial_\mu\phi, ..) = \frac{1}{2}\sum_{\mu=0,1,2,3}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - \frac{1}{2}m^2\phi^2 \tag{5}$$

Jakiemu sławnemu z relatywistki, „odpowiada” równanie K-G (1pkt.) jeżeli dodam że energia jest „jakoś” powiązana z pochodną po czasie a pęd gradientem po składowych przestrzennych? Słowo „jakoś” oznacza tutaj związek wynikających z zasad mechanik kwantowej.
Podpowiedzi:

1. ∂_μ oznacza pochodną względem μ-tewego kierunku – t,x,y,z odpowiadają indeksom 0,1,2,3, na przykład $\partial_0 = \frac{\partial}{\partial t}$
2. Ustaliłem metrykę na $(+, -, -, -)$ Co oznacza że

   $$\partial^0 = \partial_0$$

   ale

   $$\partial^1 = -\partial_1,$$

   oznacza że dla $\mu \neq \nu$ mamy

   $$\partial_\mu\phi\partial\phi^\nu = 0$$

   .

3. Równania Eulera-Lagranga w takim przypadku są równe:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = \sum_{\mu} \partial_{\mu} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_{\mu} \phi},$$

co czytamy z lewej pochodna $\mathcal{L}$ po ϕ, jest równa suma po wszystkich kierunkach z pochodnej po μtym kierunku po pochodnej $\mathcal{L}$ względem $\frac{\partial \phi}{\partial x_{\mu}}$.

4.
`https://en.wikipedia.org/wiki/Momentum_operator`
`https://en.wikipedia.org/wiki/Energy_operator`