Dziury, grupy i pewne części słonia

Zadania kwalifikacyjne

Wstęp

Pisząc zadania kwalifikacyjne wychodzę z założenia, że nie można po prostu dać uczestnikowi zadań, żeby się męczył z szukaniem informacji na temat jakichś obskurnych i mało rozpowszechnionych defninicji. Z tego powodu poniżej znajduje się skrypt, z zadaniami wplecionymi w różne definicje i konstrukcje. Zadań jest siedem i są raczej standardowe, bo wychodzę z założenia, że zadania mają sprawdzać nabytą wiedzę, a nie inteligencję uczestnika (choć część zadań jest teoretyczna i trzeba użyć abstrakcyjnego myślenia). Od razu namawiam do zaznajomienia się ze stroną warsztatów "Topologia to patologia", bo część treści nam się pokrywa, więc można szukać tam inspiracji. Co do progu to ustalę go jak już będę miał wszystkie rozwiązania, ale na pewno nie będzie za wysoki. Moim celem nie jest uwalanie ludzi, więc nawet jak się nie umie zrobić paru zadań to i tak warto je wysłać :-). W sprawie problemów, literówek, czy wskazówek zapraszam do napisania maila na:
jurczakjakub0@gmail.com

1 Teoria zbiorów

1.1 Produkty i koprodukty

Produktem, czy też iloczynem kartezjańskim albo po prostu iloczynem zbiorów A i B nazywamy zbiór par uporządkowanych

$$\{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}$$

i oznaczamy przez $A \times B$. Rekurencyjnie biorąc produkty z nowymi zbiorami jesteśmy w stanie zdefiniować produkt <u>skończenie</u> wielu zbiorów $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$ (należy tutaj utożsamić elementy typu $((a, b), c)$ z (a, b, c), aby dostać swoistą łączność iloczynu, ale to drobny detal). Czasami używa się oznaczenia $\prod_{i \in \{1,2,\dots,n\}} A_i$.

Koproduktem albo sumą rozłączną rodziny zbiorów $\{A_i\}_{(i \in I)}$ indeksowaną zbiorem I (I jest dowolny, niekoniecznie skończony) nazywamy zbiór $\coprod_{i \in I} A_i$

$$\coprod_{i \in I} A_i := \{(a, i) \mid a \in A_i, i \in I\}$$

Często piszemy po prostu $A_1 \sqcup \cdots \sqcup A_n$ jeśli I jest skończony oraz $\coprod_{i \in I} A$ jeśli każde $A_i \equiv A$ jest takie samo.

⋆ **Zadanie 1**
Przedstaw geometrycznie zbiory $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ oraz $\coprod_{i \in \mathbb{S}^1} \mathbb{R}$, gdzie $\mathbb{S}^1$ to okrąg - najlepiej narysować albo podać nazwę. Opisz czym jest $\coprod_{i \in I} A_i$, gdy I jest pewnym podzbiorem $\mathbb{N}$.

1.2 Relacje równoważności i ilorazy zbiorów

Formalnie relacją na zbiorze A ($\sim$) nazywamy dowolny podzbiór w iloczynie $A \times A$. Jeśli para (a, b) jest w naszym zbiorze nazwanym relacją, mówimy, że a jest w relacji z b i piszemy $a \sim b$. Mówimy, że relacja jest relacją równoważności, gdy spełnione są następujące warunki:

- zwrotność: $a \sim a$ (czyli to samo co $(a, a) \in \sim$)
- symetryczność: $a \sim b \implies b \sim a$
- przechodniość: $a \sim b$ i $b \sim c \implies a \sim c$

Cały pomysł konstrukcji relacji jest taki, żeby bardzo rygorystycznie i formalnie zebrać elementy zbioru A w grupki. Mianowicie: klasą abstrakcji (także się używa nazwy klasa równoważności) elementu a dla relacji równoważności $\sim$ na zbiorze A jest zbiór wszystkich elementów będących w relacji z a. Taką klasę oznaczamy przez $[a]_\sim$, a element a nazywamy jej reprezentantem. Warunki dla relacji rówoważności dają temu podziałowi na grupki bardzo przyjemne własności, których dowód jest przedmiotem:

⋆ **Zadanie 2**
Wykaż, że dla relacji równoważności $\sim$ na zbiorze A zachodzi:

$$[a]_\sim \cap [b]_\sim \neq \emptyset \iff [a]_\sim = [b]_\sim$$

co można wyrazić słowami: różne klasy są rozłączne.

Zbiór wszystkich klas równoważności nazywamy zbiorem ilorazowym i oznaczamy $A/\sim$.

⋆ **Zadanie 3**
Przejdź przez następującą konstrukcję: niechaj $A = \bar{\mathbb{N}} \times \bar{\mathbb{N}}$, gdzie $\bar{\mathbb{N}} = \mathbb{N} \cup \{0\}$. Zadajemy $\sim$ warunkiem $(a, b) \sim (c, d) \iff a + d = c + b$. Tworzymy zbiór $A/_\sim$ i zadajemy na nim funkcję: $m : A/_\sim \times A/_\sim \to A/_\sim$ wzorem:

$$m([(a, b)], [(c, d)]) = [(a + c, b + d)]$$

gdzie $+$ jest dodawaniem w $\bar{\mathbb{N}}$. To odwzorowanie działa tak, że wybieramy reprezentantów danych klas abstrakcji i z nimi coś robimy. Nie mamy jednak pewności, że jak wybierzemy inne elementy z tej klasy, tj. innych reprezentantów, i z nimi zrobimy to samo, to wyjdzie to samo, co jest warunkiem, aby m była funkcją (inaczej

m byłaby wielowartościowa). Musisz więc sprawdzić, czy jest to dobrze zdefiniowane odwzorowanie. Uwaga! - a priori mamy do czynienia tylko z liczbami naturalnymi, dlatego należy uważać z odejmowaniem, bo nie jest dobrze zdefiniowane. Następnie wskaż element $e \in A_\sim$, który spełnia $m(e, g) = m(g, e) = g$ dla dowolnego g oraz dla danego $h \in A_\sim$ wskaż element $\tilde{h}$ spełniający $m(h, \tilde{h}) = m(\tilde{h}, h) = e$. Skonkluduj konstrukcję stwierdzając, że $A_\sim$ wraz z m to $\mathbb{Z}$ - może być machane rękami, formalne narzędzia do takich zabaw dostaniemy na wykładzie. Analogicznie skonstruuj $\mathbb{Q}$.

2 Przestrzenie metryczne

2.1 Kule i zbiory otwarte

Metryką na zbiorze X nazywamy funkcję $d : X \times X \to \mathbb{R}$ o następujących własnościach:

- zwrotność: $d(x, x) = 0$
- symetryczność: $d(y, x) = d(x, y)$
- nierówność trójkąta: $d(x, y) + d(y, z) \geq d(x, z)$

Parę (X, d) nazywamy przestrzenią metryczną. Często d określamy mianem odległości na X, gdyż formalizuje ona nasze intuicje o odległości.

⋆ Zadanie 4
Podaj parę przykładów swoich ulubionych przestrzeni metrycznych + pokaż, że nimi są.

Na przestrzeni (X, d) wprowadzamy pojęcie kuli otwartej o środku w x o promieniu $r \neq 0$.

$$K(x, r) = \{y \in X \mid d(x, y) < r\}$$

⋆ Zadanie 5
Wykaż, że dla dowolnego $y \in K(x, r)$ istnieje kula o środku w y w całości zawarta w $K(x, r)$

Rodzinę zbiorów τ składającą się z wszystkich kul otwartych, ich dowolnych sum (mnogościowych) oraz zbioru pustego nazywamy topologią, a jej elementy - zbiorami otwartymi. Łatwo zobaczyć, że dowolna suma zbiorów otwartych jest otwarta. Trochę bardziej skomplikowane jest pokazanie, że skończone przecięcie zbiorów otwartych jest otwarte - to jest kwestia aproksymacji tego przecięcia coraz mniejszymi kulami. Wartościowym faktem jest to, że jeśli wokół każdego punktu w zbiorze A istnieje kula otwarta w całości zawarta w A, to A jest otwarty (wynika to z faktu, że A z założenia da się przedstawić jako sumę kul otwartych). I odwrotnie - każdy punkt zbioru otwartego jest zawarty w jakiejś kuli, więc na mocy zadania 4. można wskazać taką kulę, której środkiem jest dany punkt i jest zawarta w całości w A.

2.2 Ciągłość i zbieżność

Mówimy, że ciąg punktów w X $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ zbiega do punktu a, gdy zachodzi:

$$\lim_{n\to\infty} d(a_n, a) = 0$$

gdzie lim jest zwykłą granicą ciągu w $\mathbb{R}$. Jeśli dalej rozpiszemy definicję granicy w $\mathbb{R}$ dostajemy:

$$\forall_{\varepsilon>0}\exists_{N\in\mathbb{N}}\forall_{n>N} d(a_n, a) < \varepsilon$$

Często nadużywamy notacji i do zbieżności w przestrzeni metrycznej używamy oznaczeń dla zbieżności w $\mathbb{R}$.

Odwzorowanie $f : X \to Y$ między przestrzeniami metrycznymi jest ciągłe w punkcie x_0, gdy zachodzi jeden z równoważnych warunków (definicja Cauchego i Heinego odpowiednio):

$$\forall_{\varepsilon>0}\exists_{\delta>0}\forall_{x\in X}(d_X(x, x_0) < \delta \implies d_Y(f(x), f(x_0)) < \varepsilon)$$

$$\Updownarrow$$

$$a_n \to a \implies f(a_n) \to f(a)\ \forall_{(a_n)}$$

Odwzorowanie ciągłe w każdym punkcie dziedziny nazywamy po prostu odwzorowaniem ciągłym. Ciągłość gwarantuje nam, że odwzorowanie nie będzie arbitralnie skakało między punktami. Działa to w analogii do tego jak w szkole definiuje się ciągłość funkcji $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, czyli g jest ciągłe, gdy jej wykres nie ma skoków.

$\star$ **Zadanie 6**

Wykaż, że odwzorowanie $f : X \to Y$ jest ciągłe wtedy i tylko wtedy, gdy przeciwobrazem zbioru otwartego względem f jest zbiór otwarty (przeciwobraz zbioru $A \subset Y$ względem f, ozn. $f^{-1}(A)$, to wszystkie takie punkty z X, które lądują w A po zadziałaniu f)

Wskazówki: Przetłumacz definicję Cauchego ciągłości na język kul. Następnie użyj zadania 4., aby udowodnić twierdzenie dla pojedyńczych kul otwartych, a potem uogólnij.

$\star$ **Zadanie 7**

Niech X będzie zbiorem. Zadajemy na nim tzn. metrykę dyskretną:

$$d(x, y) = \begin{cases} 0 \mid \text{gdy } x = y \\ 1 \mid \text{gdy } x \neq y \end{cases}$$

Znajdź wszystkie odwzorowania ciągłe $f : X \to Y$, gdzie (Y, d_Y) jest dowolną inną przestrzenią metryczną. Wersja trudniejsza tego zadania: znajdź wszystkie odwzorowania ciągłe $f : Y \to X$ - można poczytać o pojęciu spójności w ramach inspiracji.